

Cenni alla cartografia araba medievale

Introduzione: Oltre i Pregiudizi Interpretativi

La cartografia araba medievale rappresenta uno dei capitoli più affascinanti e complessi della storia della scienza. Quando parliamo di questa tradizione, dobbiamo innanzitutto liberarci da alcuni pregiudizi interpretativi che hanno a lungo caratterizzato gli studi occidentali. La cartografia islamica non fu semplicemente un ponte tra l'antichità classica e il Rinascimento europeo, né si limitò a preservare il sapere tolemaico. Essa sviluppò invece approcci originali, fondati su una sintesi peculiare tra eredità ellenistica, tradizioni persiane e indiane, osservazioni empiriche derivanti dai viaggi commerciali e dalle esplorazioni, e una visione cosmografica profondamente radicata nella concezione islamica dell'universo.

Le Radici della Tradizione Cartografica Araba

La nascita della cartografia araba si colloca in un contesto storico straordinariamente favorevole. L'espansione dell'Islam nel settimo e ottavo secolo aveva creato un impero che si estendeva dall'Atlantico all'Indo, generando esigenze pratiche di orientamento, amministrazione territoriale e comunicazione. Il pellegrinaggio alla Mecca, la determinazione della qibla (direzione della preghiera verso la Ka'ba), le rotte commerciali carovaniere e marittime richiedevano tutti strumenti di orientamento e rappresentazione spaziale. Ma fu soprattutto il grande movimento di traduzione promosso dai califfi abbasidi, culminato nella Bayt al-Hikma (Casa della Sapienza) di Baghdad, a fornire le basi teoriche per lo sviluppo della cartografia.

Tra l'ottavo e il nono secolo, opere fondamentali della geografia e astronomia greca vennero tradotte in arabo. La Geografia di Tolomeo, nota come Kitab Surat al-Ard (Il Libro della Forma della Terra), divenne il testo di riferimento. Tuttavia, i geografi arabi non si limitarono a tradurre passivamente. Già al-Khwarizmi, il grande matematico del nono secolo famoso per aver dato il nome all'algoritmo, compose una revisione critica della Geografia tolemaica, in cui correggeva numerose coordinate e introduceva nuove informazioni geografiche derivanti dalle conoscenze arabe contemporanee.

Le Correzioni di al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi non si limitò a tradurre Tolomeo, ma operò una revisione sistematica delle coordinate. Mentre Tolomeo collocava la lunghezza del Mediterraneo a circa 62 gradi di longitudine, al-Khwarizmi, basandosi su informazioni più accurate derivanti dalla navigazione araba e dalle

misurazioni terrestri, ridusse questo valore. Sebbene le sue coordinate non fossero perfette (il valore reale è di circa 42 gradi), rappresentavano un miglioramento significativo rispetto alle stime tolemaiche.

Il metodo di al-Khwarizmi per determinare le longitudini combinava diverse tecniche. La più precisa si basava sulle eclissi lunari simultanee: se due osservatori in luoghi diversi registravano lo stesso evento celeste e notavano l'ora locale in cui avveniva, la differenza tra i tempi locali corrispondeva alla differenza in longitudine. Poiché la Terra ruota di 360 gradi in 24 ore, ogni ora di differenza corrisponde a 15 gradi di longitudine. Un altro metodo convertiva le distanze misurate lungo percorsi terrestri in differenze di coordinate usando principi di trigonometria sferica, tenendo conto della direzione di viaggio e della latitudine media del percorso.

Le Due Grandi Tradizioni Cartografiche

La cartografia araba si sviluppò lungo due filoni principali, spesso intrecciati ma concettualmente distinti. Il primo, che possiamo definire tradizione scientifica o astronomica (al-Suwar, letteralmente "le figure" o "le rappresentazioni"), si basava su principi matematici e astronomici, utilizzava coordinate geografiche espresse in gradi di longitudine e latitudine, e concepiva la Terra come una sfera. Questa tradizione, erede diretta di Tolomeo, trovò i suoi massimi esponenti in studiosi come al-Biruni, al-Idrisi e Ibn Khaldun.

La seconda tradizione, quella descrittiva o amministrativa, è associata al genere letterario dei Masalik wa al-Mamalik (Le Vie e i Regni). Questi trattati combinavano descrizioni geografiche testuali con rappresentazioni cartografiche schematiche, spesso non basate su proiezioni matematiche rigorose ma su convenzioni simboliche e rappresentazioni che privilegiavano le connessioni funzionali tra luoghi. Geografi come Ibn Khordadbeh, al-Istakhri, Ibn Hawqal e al-Muqaddasi produssero opere di questo tipo, destinate principalmente all'amministrazione imperiale e ai mercanti.

È importante sottolineare che questa distinzione non implica una gerarchia di valore. Le mappe della tradizione Masalik wa al-Mamalik, pur non utilizzando coordinate precise, rispondevano a esigenze pratiche specifiche e incorporavano una concezione dello spazio profondamente radicata nell'esperienza vissuta. La loro apparente "schematicità" rifletteva una logica cartografica alternativa, dove le relazioni tra luoghi (connessioni stradali, distanze temporali di viaggio, relazioni politiche) prevalevano sulla precisione geometrica assoluta.

Le Distanze Temporal: Un Sistema Alternativo

Nelle opere della tradizione *Masalik wa al-Mamalik*, le distanze erano spesso espresse in "marhala" (tappe di viaggio) o "yawm" (giorni). Una marhala standard corrispondeva alla distanza che una carovana poteva percorrere in un giorno, tipicamente tra 30 e 40 chilometri a seconda del terreno. Questo sistema rifletteva una concezione funzionale dello spazio: ciò che contava non era la distanza geometrica astratta, ma il tempo effettivo necessario per attraversare un territorio.

Ibn Khordadbeh, morto circa nell'885, nel suo *Kitab al-Masalik wa al-Mamalik* descriveva le rotte in questo modo, elencando le tappe successive e il numero di giorni necessari per percorrerle. Questa rappresentazione può essere concepita come una rete dove i nodi sono le città e le connessioni indicano i percorsi possibili, ciascuno con il proprio "peso" in termini di tempo di percorrenza. La distanza tra due città non direttamente connesse era data dal percorso più breve attraverso questa rete, analogamente a come oggi concepiamo le reti di trasporto.

Al-Idrisi e il Planisfero di Ruggero II

Nessuna discussione sulla cartografia araba può prescindere da Abu Abd Allah Muhammad ibn Muhammad ibn Abd Allah ibn Idris al-Sharif al-Idrisi, comunemente noto come al-Idrisi. Nato a Ceuta intorno al 1100 in una famiglia che rivendicava discendenza dal Profeta, al-Idrisi ricevette un'educazione eccellente a Cordova e viaggiò estensivamente nel Mediterraneo e probabilmente oltre. La sua opera maggiore, il *Kitab Nuzhat al-Mushtaq fi Ikhtiraq al-Afaq* (Il Libro del Diletto di Chi Desidera Attraversare gli Orizzonti), nota anche come *Kitab Rujar* (Il Libro di Ruggero), fu completata nel 1154 alla corte di Ruggero II di Sicilia.

Il planisfero di al-Idrisi rappresenta un vertice della cartografia medievale, araba ed europea. Basato su una combinazione di fonti tolemaiche, informazioni contemporanee raccolte attraverso testimonianze di viaggiatori e mercanti, e possibilmente osservazioni astronomiche dirette, il lavoro di al-Idrisi copriva tutto il mondo conosciuto, dall'Atlantico alla Cina, dall'Islanda all'Africa equatoriale. La mappa era accompagnata da un testo geografico dettagliato, organizzato in sette climi (aqalim, plurale di iqlim) e dieci sezioni longitudinali, per un totale di settanta mappe regionali.

La Proiezione e l'Accuratezza

Al-Idrisi utilizzò una proiezione cilindrica modificata, dove i paralleli erano rappresentati come linee rette orizzontali e i meridiani come curve. Sebbene non possediamo una descrizione matematica esplicita della sua proiezione nelle fonti medievali, possiamo ricostruirne le caratteristiche dall'analisi delle

mappe superstiti. Questa proiezione riduceva le distorsioni alle alte latitudini rispetto a una semplice proiezione cilindrica, rendendo la rappresentazione più realistica.

Un aspetto notevole del lavoro di al-Idrisi è la sua accuratezza relativa. Mentre alcune regioni remote mostrano inevitabili distorsioni e lacune, le coste del Mediterraneo, del Mar Nero e delle regioni islamiche centrali sono rappresentate con un dettaglio sorprendente. La forma dell'Italia, della penisola iberica, del Nord Africa mostrano un grado di precisione che non sarebbe stato superato in Europa per diversi secoli. Analizzando le coordinate fornite da al-Idrisi per città mediterranee, gli errori in latitudine risultano spesso inferiori a un quinto di grado, corrispondenti a circa 20 chilometri, notevole per l'epoca.

Le mappe di al-Idrisi, seguendo la convenzione araba, orientavano il sud verso l'alto. Questa scelta rifletteva sia considerazioni pratiche (per gli osservatori nell'emisfero nord, gli astri culminano a sud) sia concezioni cosmografiche (la Mecca si trova a sud rispetto a gran parte del mondo islamico). Un viaggiatore abituato a questa convenzione non aveva difficoltà nell'uso delle mappe, analogamente a come gli utenti moderni si orientano con mappe che hanno il nord in alto.

La Geografia Matematica di al-Biruni

Abu Rayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni, nato nel 973 nell'attuale Uzbekistan e morto intorno al 1050, fu uno dei più grandi scienziati della civiltà islamica. Poliedrico e rigoroso, al-Biruni contribuì in modo fondamentale all'astronomia, alla matematica, alla cronologia e alla geografia matematica. La sua opera geografica principale, il Kitab Tahdid Nihayat al-Amakin li-Tashih Masafat al-Masakin (Determinazione delle Coordinate dei Luoghi per la Correzione delle Distanze tra le Città), rappresenta il culmine della geografia matematica araba.

La Misurazione del Raggio Terrestre

Al-Biruni comprese profondamente la natura sferica della Terra e le implicazioni di questa sfericità per la cartografia. Uno dei suoi contributi più notevoli fu la determinazione della circonferenza terrestre attraverso un metodo geometricamente elegante che non richiedeva misurazioni terrestri su lunghe distanze, a differenza del metodo di Eratostene.

Il metodo di al-Biruni utilizzava l'osservazione dell'angolo di depressione dell'orizzonte da una montagna di altezza nota. Un osservatore in cima a una montagna può vedere l'orizzonte a una certa distanza, dove la linea di vista è tangente alla superficie terrestre. Misurando l'angolo tra l'orizzontale locale e la linea verso l'orizzonte, e conoscendo l'altezza della montagna, è possibile calcolare il raggio della Terra attraverso relazioni trigonometriche derivate

dalla geometria della sfera.

Al-Biruni effettuò le sue misurazioni da una montagna presso Nandana, nell'attuale Pakistan, con altezza stimata di circa 305 metri. Le sue osservazioni lo portarono a un valore della circonferenza terrestre molto vicino al valore moderno di circa 40.000 chilometri, una stima straordinariamente accurata per l'epoca. La differenza rispetto al valore reale si spiega in parte con errori di misurazione inevitabili con gli strumenti dell'epoca, e in parte con il fatto che la Terra non è una sfera perfetta ma è leggermente schiacciata ai poli, un fatto che al-Biruni non poteva conoscere.

Il Problema delle Proiezioni Cartografiche

Al-Biruni comprese anche il problema fondamentale della rappresentazione cartografica: l'impossibilità di mappare una superficie sferica su un piano senza distorsioni. Nel suo *Kitab al-Tafhim li-Awa'il Sina'at al-Tanjim* (Elementi di Astrologia), discusse varie proiezioni e i loro limiti. Benché non sviluppasse formalmente i teoremi matematici che sarebbero stati dimostrati secoli dopo da Gauss, al-Biruni aveva intuito empiricamente che nessuna proiezione può preservare simultaneamente tutte le proprietà geometriche.

Al-Biruni osservò che le proiezioni che preservavano bene le forme tendevano a distorcere le aree, mentre quelle che preservavano le aree distorcevano le forme. Comprese che ogni scelta cartografica comportava compromessi, e che la proiezione ottimale dipendeva dall'uso previsto della mappa. Questa consapevolezza critica distingue al-Biruni come un geografo matematico di straordinaria sofisticazione per il suo tempo.

La Determinazione delle Latitudini

Durante il suo lungo soggiorno in India, al-Biruni studiò approfonditamente la geografia, l'astronomia e la matematica indiane, componendo il monumentale *Kitab fi Tahqiq ma li-l-Hind* (Indagine sull'India). Le sue osservazioni astronomiche per determinare le latitudini erano estremamente accurate per l'epoca. Utilizzava gnomoni, quadranti e astrolabi per misurare l'altezza meridiana del Sole, da cui poteva dedurre la latitudine locale.

Il principio è relativamente semplice: a mezzogiorno, il Sole raggiunge la sua massima altezza sopra l'orizzonte. Questa altezza dipende dalla latitudine dell'osservatore e dalla declinazione del Sole (la sua posizione rispetto all'equatore celeste, che varia durante l'anno). Conoscendo la declinazione del Sole per ogni giorno dell'anno attraverso tavole astronomiche, e misurando l'altezza meridiana, si può calcolare la latitudine. Al-Biruni disponeva di tavole accurate della declinazione solare compilate attraverso osservazioni prolungate, che gli permettevano di determinare la latitudine con

un'accuratezza stimata di circa un decimo di grado, corrispondente a 10-20 chilometri.

La Rappresentazione dello Spazio nella Tradizione Balkhi

Parallelamente alla geografia matematica, la tradizione cartografica associata alla scuola di al-Balkhi sviluppò un approccio radicalmente diverso. Abu Zayd Ahmad ibn Sahl al-Balkhi, vissuto nel decimo secolo, fondò una tradizione che sarebbe stata continuata da al-Istakhri, Ibn Hawqal e al-Muqaddasi. Le mappe di questa scuola, sebbene apparentemente più stilizzate rispetto a quelle della tradizione tolemaica, incorporavano una sofisticata comprensione dello spazio sociale, politico ed economico.

Convenzioni Simboliche e Logica Topologica

Le mappe della scuola di al-Balkhi rappresentavano il mondo islamico (dar al-Islam) attraverso convenzioni simboliche stabili. I mari erano tipicamente colorati in verde o blu, i fiumi rappresentati con linee sinuose, le montagne con linee che ricordavano catene. Ma soprattutto, queste mappe davano priorità alle connessioni funzionali tra luoghi. Le città importanti erano enfatizzate indipendentemente dalle loro dimensioni fisiche reali, le rotte commerciali evidenziate, le distanze indicate in giorni di viaggio piuttosto che in unità lineari.

Questo approccio rifletteva una concezione dello spazio profondamente diversa da quella euclidea della geografia matematica. Lo spazio non era concepito come un contenitore neutro e omogeneo dove collocare oggetti secondo coordinate, ma come una rete di relazioni, percorsi, confini politici e regioni climatiche. Le mappe di al-Balkhi possono essere viste come diagrammi che preservano la struttura di connettività piuttosto che la geometria euclidea, anticipando concetti che ritroveremo nella teoria moderna dei grafi e nell'analisi di rete.

Ibn Hawqal, che viaggiò estensivamente attraverso il mondo islamico tra il 943 e il 973, produsse mappe dettagliate di regioni specifiche. La sua rappresentazione della Sicilia, per esempio, mostrava le principali città, le fortificazioni, i porti e le caratteristiche topografiche rilevanti, anche se la forma geometrica dell'isola era altamente stilizzata. Nella mappa di Ibn Hawqal, la Sicilia appare quasi triangolare, ma le proporzioni e gli angoli sono modificati per enfatizzare la posizione relativa delle città principali, le rotte marittime verso il Nord Africa e la penisola italiana, le zone agricole produttive e le fortificazioni strategiche. Questo non costituiva un'imperfezione ma una scelta deliberata: l'obiettivo non era produrre una rappresentazione fotografica ma uno strumento pratico per comprendere e navigare lo spazio sociale ed economico.

L'Atlante Nautico e la Cartografia Portolana

I marinai arabi svilupparono tecniche sofisticate di navigazione, documentate nei testi di geografia marittima arabi, come quelli preservati nelle opere di Ibn Majid e Sulayman al-Mahri nei secoli quindicesimo e sedicesimo. Questi testi rivelano una profonda conoscenza della navigazione astronomica, delle correnti, dei venti monsoni e delle caratteristiche costiere.

Ahmad ibn Majid e il Kamal

Ahmad ibn Majid, conosciuto come il "Leone del Mare", compose numerosi trattati di navigazione, inclusi poemi mnemonici che i marinai potevano memorizzare per facilitare la navigazione. I suoi lavori descrivono l'uso del kamal, uno strumento semplice ma efficace per misurare l'altezza delle stelle sopra l'orizzonte.

Il kamal consisteva in una tavoletta rettangolare di legno con dimensioni standard, collegata a un filo con nodi a intervalli regolari. Per usarlo, il navigatore teneva il filo teso con i denti, posizionando un nodo specifico tra i denti, poi allungava il braccio tenendo la tavoletta verticalmente. Allineava il bordo inferiore della tavoletta con l'orizzonte e osservava se la stella (tipicamente Polaris nell'emisfero nord) appariva allineata con il bordo superiore. Ogni nodo corrispondeva a una latitudine specifica. Marinai esperti conoscevano quali nodi corrispondevano ai porti di destinazione, permettendo una navigazione latitudinale accurata.

La semplicità dello strumento celava una comprensione sofisticata della trigonometria pratica. L'angolo sotteso dalla tavoletta dipendeva dalla sua altezza e dalla distanza dall'occhio, determinata dal nodo selezionato. Diversi nodi permettevano di misurare angoli da circa un grado fino a 15-20 gradi, coprendo il range necessario per la navigazione tra l'Arabia, l'India e l'Africa orientale.

La Navigazione Monsonica

La navigazione nell'Oceano Indiano richiedeva una comprensione accurata dei monsoni. I marinai arabi sapevano che i venti monsoni invertivano direzione stagionalmente, soffiando da sud-ovest in estate (approssimativamente da aprile a settembre) e da nord-est in inverno (approssimativamente da ottobre a marzo). Questo fenomeno, causato dal riscaldamento differenziale del continente asiatico e dell'oceano, era sfruttato sistematicamente per pianificare i viaggi marittimi.

Durante l'estate nell'emisfero nord, il continente asiatico si riscalda rapidamente mentre l'oceano rimane relativamente fresco. L'aria calda sul continente sale creando una zona di bassa pressione, e l'aria più fresca e umida dell'oceano viene aspirata verso il continente, creando venti da sud-

ovest. Durante l'inverno il processo si inverte: il continente si raffredda rapidamente, si crea alta pressione, e i venti soffiano dal continente verso l'oceano da nord-est.

I marinai arabi compilavano tavole dettagliate che indicavano i tempi di navigazione tra porti principali, sfruttando i monsoni ottimali. Dalle opere di Ibn Majid apprendiamo che la rotta da Aden a Calicut nell'India sudoccidentale richiedeva 20-25 giorni con il monsone estivo, mentre la rotta inversa era sconsigliata con venti contrari. La rotta da Calicut a Malindi nell'Africa orientale richiedeva 30-35 giorni con il monsone invernale. Questi tempi tenevano conto della velocità media della nave (tipicamente 3-5 nodi con venti favorevoli), delle correnti marine e delle soste intermedie per rifornimento d'acqua.

La Cosmografia e la Forma della Terra

La concezione della Terra nella scienza islamica medievale era inequivocabilmente sferica. Questo fatto, a volte dimenticato nelle narrazioni popolari sulla storia della scienza, era universalmente accettato tra gli studiosi musulmani colti. Gli argomenti per la sfericità della Terra erano molteplici e ben compresi.

Prove Osservazionali della Sfericità

La prima prova veniva dalla variazione delle stelle visibili con la latitudine. Al-Biruni e altri notarono che durante i viaggi verso nord o sud, nuove stelle diventavano visibili all'orizzonte mentre altre scomparivano. L'altezza della stella polare sopra l'orizzonte nord è uguale alla latitudine dell'osservatore: viaggiando un grado verso nord (circa 111 chilometri), l'altezza di Polaris aumenta di un grado. Questo è possibile solo su una superficie sferica.

Le eclissi lunari fornivano un'altra prova classica, già notata da Aristotele e ribadita dai pensatori islamici. L'ombra della Terra proiettata sulla Luna durante un'eclissi è sempre circolare, indipendentemente dal momento dell'eclissi. Se la Terra fosse un disco piatto, l'ombra potrebbe essere circolare quando l'eclissi avviene con la Luna direttamente sopra il centro del disco, ma ellittica o lineare con angolazioni diverse. L'ombra sempre circolare è coerente solo con una Terra sferica.

I marinai osservavano che quando una nave si allontana, lo scafo scompare prima delle vele, e quando si avvicina, le vele appaiono prima dello scafo. Questo fenomeno è direttamente conseguente alla curvatura terrestre e veniva comunemente citato come prova empirica della sfericità.

La Misurazione della Circonferenza Terrestre sotto al-Ma'mun

Durante il regno del califfo al-Ma'mun nel nono secolo, due gruppi di astronomi condussero una delle prime misurazioni geodetiche sistematiche della circonferenza terrestre. Il metodo era simile a quello di Eratostene ma

con strumenti più precisi. Due gruppi partirono da un punto nella pianura della Mesopotamia, probabilmente vicino a Sinjar. Un gruppo viaggiò verso nord lungo un meridiano, l'altro verso sud. Ogni gruppo misurò la distanza percorsa fino a quando l'altezza della stella polare cambiava di un grado. La distanza misurata, moltiplicata per 360, dava la circonferenza.

Le fonti storiche riportano che i due gruppi misurarono circa 56 miglia arabe per grado, per una circonferenza di circa 20.000 miglia arabe. La questione critica è la lunghezza della migliaia araba usata, poiché esistevano diverse definizioni regionali. Assumendo una migliaia araba di circa 2 chilometri, il risultato sarebbe straordinariamente vicino al valore moderno della circonferenza meridianale di 40.000 chilometri. Anche tenendo conto di probabili errori di misurazione (nella distanza terrestre, nella deviazione dal meridiano perfetto, e nella misurazione dell'altezza stellare), l'accuratezza del risultato suggerisce che gli astronomi di al-Ma'mun utilizzarono tecniche sofisticate di media e correzione.

Le Correzioni della Qibla e la Geografia Sacra

Un'applicazione pratica fondamentale della geografia matematica islamica era la determinazione della qibla, la direzione della Ka'ba alla Mecca verso cui i musulmani devono orientarsi durante la preghiera. Questo problema, apparentemente semplice, coinvolge trigonometria sferica sofisticata. La direzione della qibla da una località verso la Mecca richiede il calcolo dell'azimut del cerchio massimo (il percorso più breve sulla superficie sferica) che connette i due punti.

Formule e Metodi di Calcolo

Gli astronomi musulmani svilupparono formule precise per questo calcolo, basate sulla trigonometria sferica. Conoscendo le coordinate geografiche della propria posizione e quelle della Mecca, è possibile calcolare l'angolo di direzione iniziale del cerchio massimo che connette i due luoghi. Questo calcolo richiede la risoluzione di triangoli sferici formati dal polo nord, la posizione dell'osservatore e la Mecca.

Gli astronomi musulmani compilarono estese tavole della qibla per centinaia di città, organizzate per climi latitudinali e longitudini relative alla Mecca. Queste tavole permettevano ai musulmani in tutto il mondo islamico di orientare correttamente le loro preghiere e le loro moschee. Alcuni astrolabi specializzati includevano curve e scale che permettevano di determinare la qibla direttamente per diverse latitudini.

Un metodo pratico usava l'ombra del Sole per determinare la qibla. Poiché la Mecca si trova a circa 21 gradi di latitudine nord, due volte l'anno il Sole

passa direttamente sopra la città (quando la declinazione solare è uguale a questa latitudine). In quei momenti precisi, gli oggetti verticali alla Mecca non proiettano ombra, e la direzione dell'ombra in qualsiasi altro luogo punta esattamente verso o opposta alla qibla.

Geografia Sacra

La geografia islamica incorporava anche una dimensione sacra che andava oltre il puro calcolo matematico. La Mecca occupava il centro simbolico del mondo islamico, e molte mappe, specialmente quelle della tradizione Balkhi, collocavano simbolicamente la Ka'ba al centro della rappresentazione. Esisteva inoltre una geografia dei luoghi santi che includeva i siti visitati dai profeti, le battaglie dell'era del Profeta Muhammad, i luoghi di sepoltura dei compagni (Sahaba), le tombe degli imam (particolarmente importante per gli sciiti), e i luoghi di miracoli riconosciuti. Questa geografia sacra sovrapponeva uno strato di significato religioso allo spazio fisico, creando una topografia spirituale del mondo islamico.

Al-Mas'udi e la Geografia Storica

Abu al-Hasan Ali ibn al-Husayn al-Mas'udi, vissuto nel decimo secolo, rappresenta un approccio diverso alla geografia, quello che potremmo chiamare geografia storica o culturale. Il suo *Muruj al-Dhahab wa Ma'adin al-Jawhar* (I Prati d'Oro e le Miniere di Gemme) combina resoconti storici, osservazioni geografiche, descrizioni etnografiche e riflessioni filosofiche in una sintesi affascinante.

Al-Mas'udi viaggiò estensivamente, visitando la Persia, l'India, Ceylon, l'Africa orientale, il Mediterraneo orientale e altri luoghi. Le sue descrizioni geografiche sono arricchite da informazioni sui popoli, i costumi, le religioni, i sistemi politici e le economie delle regioni che visitò. Questo approccio olistico anticipava quello che oggi chiameremmo geografia umana o antropologia geografica.

La sua descrizione dell'Oceano Indiano, per esempio, non si limitava alle caratteristiche fisiche ma includeva informazioni sui pattern dei monsoni, sulle rotte commerciali principali, sui porti di scambio, sulle merci caratteristiche di ciascuna regione, sui popoli costieri, sulle comunità arabe e persiane diasporiche, sulle lingue parlate e sui costumi locali. Al-Mas'udi fece anche osservazioni interessanti sulle maree, notando la correlazione con le fasi lunari e il ciclo semidiurno di due alte e due basse maree ogni giorno lunare. Sebbene la teoria completa delle maree dovesse attendere Newton e la comprensione della gravitazione universale, la sua accurata documentazione delle osservazioni era preziosa.

Yaqut al-Hamawi e il Dizionario Geografico

Un genere particolarmente importante della letteratura geografica araba era il dizionario geografico. L'esempio più monumentale è il *Mu'jam al-Buldan* (Dizionario dei Paesi) di Yaqut ibn Abd Allah al-Hamawi, completato nel 1228. Quest'opera enciclopedica organizzava alfabeticamente informazioni su migliaia di luoghi nel mondo islamico e oltre.

Per ciascun luogo, Yaqut forniva il nome standard e le varianti regionali, l'etimologia con analisi filologica dettagliata, le coordinate quando disponibili, una descrizione fisica della topografia e del clima, eventi storici significativi, specialità agricole o artigianali, studiosi o poeti nati o vissuti lì, e versi poetici che menzionavano o celebravano il luogo. L'organizzazione alfabetica rappresentava un modo radicalmente diverso di strutturare la conoscenza geografica rispetto alle mappe o ai trattati narrativi, permettendo accesso rapido, completezza, facilità di aggiornamento e riferimenti incrociati. Questo anticipava le moderne enciclopedie e database geografici.

La Cartografia dopo il Quindicesimo Secolo

La cartografia araba subì cambiamenti significativi dopo il quindicesimo secolo, con l'espansione ottomana, l'ascesa delle potenze europee e le esplorazioni oceaniche. La tradizione ottomana produsse opere cartografiche notevoli, come il *Kitab-i Bahriye* (Libro della Marina) di Piri Reis, completato nel 1521. Quest'opera combinava portolani del Mediterraneo con informazioni derivanti dalle esplorazioni portoghesi e spagnole, includendo mappe dettagliate delle coste mediterranee e alcune delle prime rappresentazioni cartografiche del Nuovo Mondo nel mondo islamico.

La famosa mappa del mondo di Piri Reis del 1513, di cui sopravvive solo un frammento che mostra l'Atlantico occidentale e parte delle coste americane, fu basata su circa venti fonti diverse. Piri Reis elenca esplicitamente le sue fonti in iscrizioni sulla mappa: otto mappe tolemaiche, una mappa araba dell'India, quattro mappe portoghesi recenti dell'Africa e dell'Oceano Indiano, e una mappa "delle terre occidentali disegnata da Colombo". La menzione della mappa di Colombo è particolarmente intrigante. Piri Reis scrive di aver interrogato un prigioniero che aveva partecipato a tre dei viaggi di Colombo, suggerendo un'acquisizione diretta di conoscenze geografiche contemporanee.

Tuttavia, la mappa di Piri Reis rappresentava anche un momento di transizione. La cartografia europea stava rapidamente avanzando, beneficiando di esplorazioni oceaniche sistematiche, sviluppo di nuove tecniche di navigazione astronomica, perfezionamento degli strumenti e,

crucialmente, dell'invenzione della stampa che permetteva la diffusione rapida di carte aggiornate. Nel mondo islamico, dove la stampa fu adottata molto più tardi (la prima tipografia ottomana fu stabilita solo nel 1727), la cartografia rimase in gran parte manoscritta, limitando la diffusione e l'aggiornamento delle mappe. Il baricentro dell'innovazione geografica si stava spostando verso l'Europa atlantica, le cui potenze marittime stavano mappando gli oceani e creando imperi globali.

Strumenti e Tecniche

L'Astrolabio: Matematica e Meccanica

L'astrolabio (al-asturlab in arabo, dal greco astrolabos) era lo strumento scientifico più versatile dell'epoca medievale. Permetteva di determinare l'ora, la latitudine, la direzione della qibla, le altezze degli edifici e delle montagne, e molto altro. L'astrolabio planisferico standard utilizzava una proiezione stereografica centrata su uno dei poli celesti, che mappa la sfera celeste su un piano preservando gli angoli e rappresentando tutti i cerchi sulla sfera come cerchi o linee rette sul piano.

Un astrolabio tipico consisteva di diversi componenti. La madre (al-umm) era il corpo principale, un disco con un bordo graduato marcato in gradi o ore. Le lamine (al-safā'ih) erano dischi intercambiabili incisi con la proiezione stereografica della sfera celeste per latitudini specifiche, mostrando cerchi di altitudine, cerchi di azimut, linee crepuscolari e cerchi dei climi. Il ragno (al-'ankabūt) era un disco traforato mobile sovrapposto alle lamine, con la proiezione dell'eclittica e puntatori per le stelle principali. L'alidada (al-'idāda) era un'asta girevole con pinnule per osservare stelle o il Sole. Il dorso conteneva scale trigonometriche, il quadrato delle ombre per misurare altezze, calendari e scale zodiacali.

Per determinare l'ora, si misurava l'altezza del Sole o di una stella nota usando l'alidada, poi sul fronte si ruotava il ragno fino a posizionare il marcatore dell'astro sull'appropriato cerchio di altitudine, e si leggeva l'ora sulla scala del limbo. L'astrolabio risolveva meccanicamente equazioni trigonometriche complesse attraverso la proiezione stereografica.

Sul dorso dell'astrolabio, il quadrato delle ombre permetteva di calcolare altezze e distanze usando la trigonometria. Conteneva due quadranti graduati da 0 a 12: l'umbra versa rappresentava la cotangente dell'angolo di elevazione, l'umbra recta la tangente. Per misurare l'altezza di un edificio, si stava a distanza nota, si misurava l'angolo di elevazione alla cima usando l'alidada, si leggeva il valore sulla scala umbra recta, e si calcolava l'altezza moltiplicando la distanza per il rapporto letto diviso dodici.

Tecniche di Misurazione Terrestre

Per misurare distanze inaccessibili, come una montagna dall'altra parte di un fiume, i geografi arabi usavano la triangolazione. Si stabiliva una base di lunghezza nota, si misuravano gli angoli verso il punto inaccessibile da entrambe le estremità della base, e si calcolava la distanza usando la legge dei seni nei triangoli. Questo metodo, basato su principi geometrici solidi, permetteva misurazioni accurate senza dover attraversare ostacoli naturali.

I geografi arabi usavano corde o catene con nodi o anelli a intervalli fissi per misurare distanze terrestri. Una catena standard (silsila) poteva essere lunga 50 o 100 cubiti (circa 25-50 metri). Gli agrimensori (muhandisūn) musulmani erano consapevoli della necessità di correggere le misurazioni su terreno inclinato: la distanza misurata lungo un pendio doveva essere moltiplicata per il coseno dell'angolo di inclinazione per ottenere la distanza orizzontale effettiva.

Concezioni Teoriche dello Spazio e Critica Epistemologica

Ibn Khaldun e la Filosofia della Geografia

Ibn Khaldun, il grande storico e filosofo della storia vissuto nel quattordicesimo secolo, dedicò parte della sua Muqaddima (Prolegomeni) alla discussione critica della geografia. Ibn Khaldun distingueva tra conoscenza diretta (ma'rifa 'ayaniyya), basata sull'osservazione personale, e conoscenza trasmessa (ma'rifa naqliyya), derivata da testimonianze altrui. Sosteneva che la conoscenza diretta era intrinsecamente più affidabile, ma riconosceva che era impossibile per qualsiasi individuo visitare personalmente tutto il mondo. La conoscenza geografica doveva quindi basarsi su una combinazione di osservazione diretta per le regioni familiari e valutazione critica delle testimonianze per le regioni remote.

Ibn Khaldun proponeva criteri per valutare l'affidabilità delle descrizioni geografiche: coerenza interna, coerenza con principi naturali noti, plausibilità data la conoscenza generale del mondo, e affidabilità della catena di trasmissione. Questo approccio critico anticipava metodi moderni di valutazione delle fonti storiche e geografiche.

Ibn Khaldun articolò anche una teoria sistematica dell'influenza del clima sulla società umana. Sosteneva che il clima (iqlim), inteso come insieme di condizioni ambientali, influenzava il temperamento fisico, il colore della pelle, le forme di organizzazione sociale e le disposizioni intellettuali. Questa teoria, oggi riconosciuta come determinismo ambientale, è problematica perché sottovaluta la plasticità culturale umana, ignora fattori storici, politici ed economici, e riflette pregiudizi culturali. Tuttavia, rappresentava un tentativo

di spiegare le variazioni geografiche in termini di principi naturali comprensibili, anticipando in forma rudimentale l'ecologia umana.

La Concezione della Gravità e della Terra Sospesa

Ibn Khaldun discusse la forma e la posizione della Terra nell'universo con notevole sofisticazione. Affermava che la Terra era sferica e "galleggiava" nello spazio senza supporto fisico, sostenuta solo da una tendenza naturale (mayl tabi'i) di tutte le parti della materia terrestre verso il centro. Nella Muqaddima scrive che la Terra è sferica in forma e galleggia nello spazio come il tuorlo in un uovo, senza supporto sotto di essa, tenuta nella sua posizione dalla tendenza naturale di tutte le sue parti verso il centro.

Questa concezione era notevolmente avanzata. Ibn Khaldun comprendeva che non serve un supporto fisico come le tartarughe o elefanti della mitologia, che ciò che chiamiamo "gravità" è una proprietà intrinseca della materia, e che tutte le parti della Terra sono attratte verso il centro comune. Pur riprendendo elementi della concezione aristotelica, Ibn Khaldun dimostrava una comprensione qualitativa sofisticata. La formulazione matematica della gravitazione doveva attendere Newton, ma la comprensione concettuale era notevole per il quattordicesimo secolo.

La Questione delle Proiezioni Cartografiche

I cartografi arabi furono consapevoli del problema fondamentale della proiezione cartografica. Rappresentare una superficie sferica su un piano richiede necessariamente distorsioni. Una proiezione può preservare gli angoli (proiezione conforme), preservare le aree (proiezione equivalente), o preservare le distanze lungo certe direzioni (proiezione equidistante), ma non può fare tutto simultaneamente. Questo è una conseguenza matematica della differenza di curvatura tra sfera e piano.

La proiezione stereografica, usata negli astrolabi, preserva gli angoli ed è relativamente semplice da costruire geometricamente. Ha il vantaggio di rappresentare tutti i cerchi sulla sfera come cerchi o linee rette sul piano, proprietà particolarmente utile per l'astronomia. Tuttavia, distorce le aree, che aumentano progressivamente allontanandosi dal centro della proiezione.

La proiezione conica di Tolomeo, dove i meridiani sono linee rette convergenti verso il polo e i paralleli sono archi di cerchi concentrici, era relativamente semplice da costruire geometricamente e forniva rappresentazioni ragionevoli delle regioni di latitudine media. Questa proiezione era costruita concettualmente sviluppando un cono tangente alla sfera lungo un parallelo standard, proiettando i punti della sfera sul cono, e poi "svolgendo" il cono su un piano.

Al-Idrisi usò una variante della proiezione cilindrica dove i meridiani erano

curvati per ridurre le distorsioni alle alte latitudini. Le distanze lungo i meridiani erano corrette, mentre quelle lungo i paralleli erano corrette solo all'equatore, con distorsioni crescenti verso i poli. Questo spiega perché le mappe di al-Idrisi mostravano distorsioni crescenti verso le alte latitudini, ma erano ragionevolmente accurate per il Mediterraneo e il Medio Oriente.

Il Problema del Sud dell'Africa

Una questione geografica che impegnò i geografi arabi riguardava l'estensione meridionale del continente africano. Tolomeo nella sua Geografia rappresentava l'Oceano Indiano come un mare chiuso, con l'Africa che si estendeva verso est per congiungersi con una misteriosa "Terra Incognita". Questa concezione implicava l'impossibilità di circumnavigare l'Africa.

Alcuni geografi arabi, beneficiando delle esperienze dei marinai che navigavano regolarmente lungo le coste dell'Africa orientale fino al Mozambico e oltre, proposero che l'Africa fosse circondata dall'oceano. Al-Mas'udi scrisse che l'Oceano Indiano comunicava con l'Atlantico, suggerendo che l'Africa aveva una punta meridionale circumnavigabile. Al-Biruni discusse criticamente la questione, notando che le testimonianze dei marinai suggerivano un'Africa peninsulare, ma ammettendo l'incertezza dovuta alla mancanza di esplorazioni dirette. Al-Idrisi rappresentò l'Africa con una forma approssimativamente triangolare che si protendeva verso sud, anche se la posizione esatta della punta meridionale rimaneva incerta.

Al-Idrisi menziona nel suo Kitab Rujar un racconto affascinante dei "Mugharrirun" (gli avventurosi): otto uomini della famiglia dei Banu Raji di Lisbona, desiderosi di scoprire cosa ci fosse oltre il Mare delle Tenebre (Atlantico), equipaggiarono una nave e salparono verso ovest. Secondo il racconto, navigarono per circa undici giorni, incontrarono un mare con onde enormi e oscurità, virarono verso sud, dopo dodici giorni raggiunsero un'isola con pecore selvatiche, continuarono e incontrarono popolazioni che parlavano una lingua incomprensibile, furono fatti prigionieri, trasferiti su un'altra isola dove incontrarono un interprete arabo, e alla fine tornarono. Questo racconto è stato interpretato in vari modi, ma dimostra l'interesse per l'esplorazione atlantica nel mondo islamico medievale.

La Rappresentazione dell'Asia Orientale

La conoscenza araba dell'Asia orientale derivava da rotte della seta terrestri, rotte marittime dall'India verso il sud-est asiatico e la Cina, mercanti intermediari, testi geografici tradotti e occasionali scambi diplomatici. Al-Mas'udi descrisse la Cina (al-Sin) come un impero vasto con città immense e

popolazione numerosissima, abile in molte arti e mestieri, che produceva seta pregiata, porcellana fine e aveva scrittura propria, governato da un sovrano potente con amministrazione elaborata.

Le coordinate fornite dai geografi arabi per l'Asia orientale erano significativamente meno accurate di quelle per regioni più vicine, riflettendo la difficoltà di determinare le longitudini senza eclissi osservate simultaneamente o cronometri accurati. La rotta terrestre via della seta da Baghdad a Chang'an richiedeva circa cinque mesi di viaggio percorrendo circa 9.000 chilometri. La rotta marittima da Basra a Canton richiedeva circa tre mesi ed era più veloce ma dipendente dai monsoni.

Le Isole Leggendarie e i Confini del Mondo Conosciuto

L'Oceano Atlantico era conosciuto come Bahr al-Zulmat (il Mare delle Tenebre o Mare dell'Oscurità). Questo nome rifletteva che le regioni oltre le Colonne d'Ercole erano largamente inesplorate, i pericoli percepiti secondo leggende, le nebbie frequenti nell'Atlantico settentrionale, e il fatto che costituiva il confine tra il mondo conosciuto e l'ignoto. Al-Idrisi fornì descrizioni di alcune isole atlantiche, probabilmente le Canarie, Madera e altre, incluse informazioni su popolazioni indigene, prodotti naturali e distanze approssimative dalle coste.

Il termine Waq-Waq appare ripetutamente nelle opere geografiche arabe con significati apparentemente diversi, generando confusione tra gli studiosi moderni. Alcuni geografi collocavano il Waq-Waq nell'Oceano Indiano occidentale, forse Madagascar o le Comore. Altri lo collocavano più a est, forse identificandolo con isole dell'Indonesia o le Filippine. In alcune narrazioni acquisisce caratteristiche fantastiche, con alberi i cui frutti hanno forma di teste umane che emettono il suono "waq waq". La molteplicità di significati suggerisce che "Waq-Waq" fosse un termine generico per "terre remote e esotiche" piuttosto che un luogo geografico specifico.

Nella cosmografia islamica, le montagne di Qaf occupavano un posto speciale come confine mitico tra il mondo terrestre e le regioni ultraterrene. Secondo tradizioni cosmografiche, circondavano la Terra abitata come un anello, erano composte di smeraldo verde, separavano il mondo umano dalle terre di Gog e Magog, ed erano dimora di creature soprannaturali. Gli studiosi hanno proposto varie origini geografiche per il mito: il Caucaso, l'Himalaya, il Pamir o l'Hindu Kush, oppure un'eredità zoroastriana delle montagne cosmiche.

I Climi e la Teoria Ambientale

La divisione del mondo in climi (aqalim) era un concetto fondamentale della

geografia araba, ereditato dalla tradizione greca. I climi erano zone latitudinali definite dalla durata del giorno più lungo dell'anno. La divisione classica prevedeva sette climi, numerati da sud a nord. Il primo clima, il più meridionale, copriva le regioni equatoriali e tropicali dove il giorno più lungo era di circa tredici ore. I climi successivi si estendevano progressivamente verso nord, con il settimo clima che includeva le regioni settentrionali dove il giorno più lungo poteva superare le sedici ore.

Questa divisione aveva implicazioni teoriche importanti. I diversi climi erano ritenuti avere caratteristiche fisiche e umane distintive. Le regioni equatoriali del primo clima erano considerate eccessivamente calde, mentre quelle oltre il settimo clima erano eccessivamente fredde. I climi intermedi, specialmente il terzo e il quarto che includevano gran parte del mondo islamico, erano considerati temperati e favorevoli alla civiltà.

La medicina islamica medievale, basata sulla teoria umorale ippocratica-galenica, collegava i climi ai quattro umori: sangue (caldo e umido), bile gialla (caldo e secco), bile nera (freddo e secco), e flemma (freddo e umido). Il predominio di un umore determinava il temperamento: sanguigno (ottimista, socievole), collerico (irascibile, energico), melanconico (pensieroso, triste), o flemmatico (calmo, lento). Ibn Khaldun sosteneva che le popolazioni dei climi temperati avevano temperamenti più equilibrati, favorevoli alla civilizzazione.

La Tradizione delle Meraviglie: 'Aja'ib

Zakariya ibn Muhammad al-Qazwini (1203-1283) compose l'opera enciclopedica 'Aja'ib al-Makhlukat wa Ghara'ib al-Mawjudat (Le Meraviglie della Creazione e le Stranezze dell'Esistenza), che combinava cosmografia, geografia, storia naturale e elementi fantastici. L'opera era organizzata in due parti: il mondo celeste (sfere celesti, pianeti, costellazioni, fenomeni meteorologici) e il mondo terrestre (elementi, minerali, piante, animali, umani). Al-Qazwini forniva una spiegazione dell'arcobaleno che, pur non essendo completa secondo la fisica moderna, dimostrava intuizione corretta: l'arcobaleno si forma quando i raggi del sole colpiscono gocce d'acqua nell'aria, la luce viene rifratta e riflessa nelle gocce, producendo i colori visibili. Notava anche la correlazione tra maree e fasi lunari, osservando che le maree più alte si verificano in corrispondenza della luna piena e nuova, anche se la spiegazione causale corretta (attrazione gravitazionale) doveva attendere Newton.

I vulcani erano spiegati in termini di fuochi sotterranei, con caverne piene di vapori infiammabili che producevano eruzioni. I terremoti erano attribuiti a movimenti di venti intrappolati sottoterra, spostamenti di acque sotterranee, o attività vulcanica. Sebbene queste spiegazioni fossero incomplete, riconoscevano correttamente che fenomeni geologici hanno cause naturali

sottostanti.

Il testo mescolava descrizioni accurate di animali reali (elefanti, rinoceronti, giraffe) con racconti di creature leggendarie come il Rukh (uccello gigantesco capace di sollevare elefanti, forse ispirato all'uccello elefante del Madagascar), il Bahamut (pesce cosmico che sostiene la terra), e l'Anqa (fenice araba che rinasce dalle proprie ceneri). Molte di queste creature avevano significati simbolici o allegorici, rappresentando virtù o vizi, simboleggiando concetti filosofici o teologici, o servendo scopi didattici nelle narrazioni morali.

La Navigazione nel Deserto

I navigatori del deserto (dalil, plurale adilla') utilizzavano le stelle per orientarsi durante la notte. La stella polare (al-Qutb, Polaris) indica sempre il nord, e la sua altezza sopra l'orizzonte è uguale alla latitudine dell'osservatore. Le stelle circumpolari (al-Nujum al-Qutbiyya), che ruotano attorno al polo nord celeste e sono sempre visibili, includevano l'Orsa Minore, l'Orsa Maggiore e Cassiopea. La costellazione di Orione (al-Jawza), equatoriale e visibile in inverno, sorge esattamente a est e tramonta esattamente a ovest. Sirio (al-Shi'ra al-Yamaniyya), la stella più brillante del cielo, era usata come marker temporale e direzionale.

Oltre all'astronomia, i dalil usavano sottili indicatori terrestri. I tipi di sabbia (rosse, gialle, nere) derivavano dalla composizione mineralogica, e i navigatori conoscevano la distribuzione geografica. Le forme delle dune riflettono i pattern di vento: dune a mezzaluna (barchan) con "corni" che puntano sottovento, dune longitudinali parallele al vento prevalente, o dune stellate complesse con bracci multipli. La vegetazione forniva indizi: l'acacia indica presenza di acqua sotterranea, l'artemisia tollera siccità estrema, il tamarisco si trova spesso vicino a wadi con acqua stagionale. Le tracce animali indicavano rotte carovaniere (impronte di cammelli), presenza di vegetazione e acqua (tracce di antilopi), o acqua nelle vicinanze (nidi di uccelli).

Le rotte carovaniere principali erano ben documentate. La rotta del Darb al-Arba'in (Via dei Quaranta Giorni) da Darfur a Asyut percorreva circa 1.800 chilometri in quaranta giorni, con stazioni ogni 40-50 chilometri. Questa corrispondeva a circa 5-6 ore di marcia al giorno a velocità tipica dei cammelli, con riposo durante le ore più calde. La rotta da Damascus a Baghdad via Palmira percorreva circa 750 chilometri in 20-25 giorni. La rotta del hajj da Cairo alla Mecca percorreva circa 1.500 chilometri in 40-50 giorni, con stazioni ogni 30-40 chilometri.

Commercio e Informazione Geografica

Il commercio nel mondo islamico medievale creava una rete complessa che si estendeva dall'Atlantico al Pacifico. La rotta della seta terrestre trasportava seta, porcellana, spezie, tè e carta dalla Cina verso ovest, e vetro, tessuti di lana, metalli e incenso dal Medio Oriente verso est. La rotta marittima delle spezie dalle isole Molucche, Ceylon e Malabar trasportava pepe, cannella, chiodi di garofano, noce moscata e cardamomo verso Basra, Siraf e Aden. Il commercio trans-sahariano portava oro, sale, avorio e altri prodotti verso nord, e tessuti, vetro, spade e cavalli verso sud.

Il commercio a lunga distanza richiedeva strumenti finanziari sofisticati. Il sakk (assegno) era una lettera di credito che permetteva a un mercante di depositare denaro in una città e ritirarlo in un'altra, evitando il rischio di trasportare grandi somme. Questo sistema anticipava le moderne lettere di credito. La mudaraba era un contratto dove un investitore forniva capitale e un imprenditore forniva lavoro e competenza, con i profitti divisi secondo proporzioni pre-concordate. Questo permetteva il finanziamento di imprese rischiose distribuendo il rischio.

Diverse regioni del mondo islamico svilupparono specializzazioni economiche: Yemen per caffè e incenso, Persia per tappeti e seta, Andalusia per agricoltura mediterranea, Egitto per lino, Iraq per datteri, Siria per vetro e tessuti damascati. Questa specializzazione rifletteva vantaggi comparativi naturali, competenze artigianali sviluppate storicamente, e posizione geografica nelle rotte commerciali.

Geografia e Pellegrinaggio

Il pellegrinaggio alla Mecca (hajj) era uno dei flussi umani più significativi del mondo premoderno. Nel periodo medievale, si stima che partecipavano al hajj ogni anno circa 25.000-50.000 pellegrini da tutto il mondo islamico. Ogni pellegrino spendeva mediamente per trasporto, alloggio, cibo e offerte, creando un flusso economico che sosteneva intere città lungo le rotte del pellegrinaggio.

Le rotte principali avevano caratteristiche specifiche. La via egiziana (Darb al-Misri) da Cairo a Mecca via Suez, Aqaba e Tabuk percorreva circa 1.500 chilometri in 40-45 giorni. La via siriana (Darb al-Shami) da Damascus via Amman e Ma'an percorreva circa 1.300 chilometri in 35-40 giorni, ed era percorsa dalla carovana ufficiale con il kiswa (tessuto di copertura della Ka'ba). La via irachena (Darb al-'Iraqi) da Baghdad via Kufa e Ha'il attraversava le regioni più aride, richiedendo trasporto d'acqua in cisterne su cammelli specializzati per tratti desertici di anche cinque giorni tra pozzi.

Le guide del pellegrinaggio (manasik) fornivano informazioni dettagliate: itinerari con distanze tra stazioni, sequenza corretta dei riti del hajj, descrizione dei luoghi santi, stime dei costi, avvertimenti su pericoli, e

preghiere specifiche per ciascun luogo santo. Il hajj si svolge in date specifiche del calendario islamico lunare, che è circa undici giorni più corto dell'anno solare, quindi le date retrocedono attraverso le stagioni con un ciclo completo di circa 33-34 anni. Questo significava che a volte il hajj cadeva in estate con temperature estreme, altre volte in inverno con condizioni più miti.

Innovazioni Tecniche e Matematiche

Trigonometria Sferica

La trigonometria sferica fu sviluppata estensivamente da matematici musulmani per applicazioni astronomiche e geodetiche. La legge dei seni sferici stabilisce che per un triangolo sferico con lati e angoli specifici, esistono relazioni proporzionali tra i seni dei lati e i seni degli angoli opposti. Questa legge permetteva di calcolare distanze e direzioni sulla superficie terrestre. La legge dei coseni sferici forniva un'altra relazione fondamentale. Queste formule furono sistematizzate da al-Battani, Nasir al-Din al-Tusi e altri matematici islamici.

I matematici arabi compilarono tavole estensive di funzioni trigonometriche con precisione crescente nel corso dei secoli. Al-Battani nel decimo secolo raggiungeva precisione di circa un sessantesimo di grado, mentre Ulugh Beg nel quindicesimo secolo raggiungeva un tremilacinquecentosessantesimo di grado. Per valori intermedi non tabulati, matematici come al-Biruni usavano tecniche di interpolazione lineare o parabolica.

Lo Sviluppo dell'Algebra

L'algebra (al-jabr) fu sistematizzata da al-Khwarizmi nel suo Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala (Libro del completamento e del bilanciamento), circa nell'820. Al-Khwarizmi classificò le equazioni di secondo grado in sei tipi e fornì metodi di soluzione sia geometrici che algoritmici per ciascun tipo. Il suo approccio geometrico al completamento del quadrato era visivamente intuitivo: costruiva figure geometriche che rappresentavano i termini dell'equazione, aggiungeva quadrati agli angoli per completare una figura quadrata più grande, e risolveva l'equazione risultante.

Sistemi di Numerazione e Calcolo

I numeri arabi (originariamente indiani) usavano dieci cifre con notazione posizionale, offrendo enormi vantaggi rispetto ai numeri romani per calcoli aritmetici. L'algoritmo di moltiplicazione "a reticolo" (Gelosia) era un metodo elegante insegnato nelle madrise e usato dai mercanti: i numeri venivano disposti in una griglia, ogni cella conteneva il prodotto di due cifre diviso in decine e unità da una diagonale, e la lettura in diagonale dava il risultato.

finale.

Per calcolare radici quadrate, i matematici arabi usavano il metodo iterativo di Erone: partendo da una stima iniziale, si calcolava ripetutamente la media tra la stima corrente e il numero diviso per la stima. Questo metodo converge rapidamente. Jamshid al-Kashi nel quindicesimo secolo sviluppò il concetto di frazioni decimali, calcolando π con sedici cifre decimali usando poligoni inscritti e circoscritti con oltre ottocento milioni di lati.

Limitazioni e Prospettive Critiche

Nonostante progressi significativi, la precisione assoluta delle misurazioni geografiche rimaneva limitata da fattori strumentali e metodologici. I quadranti e astrolabi medievali avevano risoluzione angolare tipicamente di 5-10 minuti d'arco, con errori di lettura umani aggiuntivi, per un errore totale di circa 10-15 minuti d'arco, corrispondenti a 18-28 chilometri in latitudine. La rifrazione atmosferica deflette i raggi luminosi degli astri vicini all'orizzonte, un fenomeno di cui gli astronomi arabi erano consapevoli ma per cui non avevano formule precise di correzione.

La determinazione della longitudine rimaneva il problema più difficile. Le eclissi lunari simultanee erano teoricamente precise ma praticamente difficili perché rare, visibili solo su metà del globo, e difficili da temporizzare con precisione. Le distanze itinerarie richiedevano conoscenza precisa della direzione di viaggio e correzioni per deviazioni, con errori tipici del 15-25%. Le differenze di tempo locale richiedevano orologi accurati non disponibili: clessidre e orologi ad acqua avevano precisione insufficiente per determinazioni longitudinali affidabili.

Per regioni lontane dai centri della civilizzazione islamica, le informazioni erano necessariamente più incerte. Esisteva una catena di degradazione dell'informazione: osservazione diretta per regioni vicine aveva errori di circa 5-10%, testimonianze di seconda mano circa 20-30%, testimonianze di terza mano circa 50-100%, mentre la speculazione teorica per regioni inesplorate aveva errori indefiniti.

Dopo il decimo-undicesimo secolo, il mondo islamico subì frammentazione politica progressiva con declino del califfato abbaside, emergere di dinastie regionali, invasioni mongole che distrussero Baghdad nel 1258, e crisi economiche e demografiche. Il mecenatismo scientifico su larga scala diminuì, e progetti geodetici ambiziosi diventarono rari. La produzione scientifica continuò ma divenne più frammentata e localizzata.

La geografia araba rimaneva in gran parte descrittiva, mancando teorie sistematiche sulla formazione delle montagne, ciclo dell'acqua quantitativo, o origine delle correnti oceaniche. Sebbene fosse compreso che l'evaporazione dai mari forma nuvole, le piogge riempiono i fiumi, e i fiumi ritornano al mare,

non esisteva formulazione quantitativa del bilancio idrologico globale.

Eredità e Influenza

La trasmissione della scienza araba all'Europa avvenne attraverso diversi canali. Le traduzioni in latino nel dodicesimo e tredicesimo secolo furono cruciali. Toledo dopo la riconquista cristiana del 1085 divenne centro principale di traduzione dall'arabo al latino. Palermo e la Sicilia sotto i Normanni ospitarono una cultura trilingue dove latino, greco e arabo coesistevano. Montpellier e altre città del sud della Francia contribuirono pure al movimento di traduzione. Traduttori come Gerardo da Cremona (1114-1187) tradussero oltre ottanta opere scientifiche arabe, incluse tavole astronomiche e opere geografiche. Adelardo di Bath (1080-1152) e Roberto di Chester (dodicesimo secolo) tradussero opere di al-Khwarizmi e altri matematici e geografi arabi.

Sebbene le Crociate fossero principalmente conflitti militari, facilitarono anche scambi culturali. I crociati osservarono tecniche architettoniche, agricole e nautiche del mondo islamico. Alcuni studiosi europei soggiornarono in Medio Oriente, e gli scambi di prigionieri e diplomatici contribuirono alla circolazione di idee. I mercanti italiani che commerciavano con il mondo islamico acquisirono mappe nautiche, strumenti di navigazione e conoscenze geografiche commerciali.

Termini di Origine Araba

Molti termini nelle lingue europee derivano dall'arabo, testimonianza dell'influenza duratura. Termini geografici e astronomici includono "azimut" (da al-samt, la direzione), "nadir" (da nadhir, opposto), "zenit" (da samt al-ra's, direzione della testa), "almanacco" (da al-manakh, calendario o clima), e "Gibilterra" (da Jabal Tariq, montagna di Tariq). Termini scientifici includono "algebra" (da al-jabr, il ricongiungimento), "algoritmo" (dal nome latinizzato di al-Khwarizmi), "zero" e "cifra" (entrambi da sifr, vuoto).

Moltissime stelle hanno nomi arabi ancora in uso: Aldebaran (al-Dabaran, il seguente), Altair (al-Ta'ir, il volante), Betelgeuse (Yad al-Jawza', mano di Orione), Rigel (Rijl, piede), Deneb (Dhanab, coda), e Vega (al-Waqi', il cadente). Questa nomenclatura stellare riflette l'influenza profonda dell'astronomia araba sulla tradizione europea.

Influenza sulla Cartografia Europea

La questione dell'influenza araba sulla cartografia nautica europea, particolarmente le carte portolane, rimane oggetto di dibattito storiografico. Le carte portolane appaiono improvvisamente nel tredicesimo secolo con accuratezza sorprendente, suggerendo possibile trasmissione di tecniche

nautiche arabe. La terminologia nautica italiana include alcuni prestiti arabi, e la figura di al-Idrisi che lavorò alla corte normanna di Sicilia rappresenta un chiaro esempio di trasmissione diretta. Tuttavia, mancano documenti diretti che dimostrino trasmissione sistematica, e lo stile delle portolane differisce significativamente dalle mappe arabe tradizionali.

Il consenso attuale suggerisce una combinazione di influenza indiretta (concetti generali, strumenti), sviluppo autonomo di tecniche specifiche, e convergenza dovuta a esigenze pratiche simili. La cartografia nautica mediterranea probabilmente beneficiò di scambi informali tra marinai di diverse tradizioni, senza necessariamente una trasmissione formale e documentata.

La Cartografia Ottomana come Ponte

L'Impero Ottomano servì come intermediario culturale tra le tradizioni islamica ed europea. La mappa del mondo di Piri Reis del 1513 rappresenta una sintesi esemplare: tradizione araba-islamica classica, informazioni portoghesi catturate, possibili mappe colombiane, e osservazioni ottomane contemporanee. Seydi Ali Reis (1498-1563) scrisse il *Mir'ât-ı Kâinât* (Specchio dell'Universo), combinando cosmografia islamica tradizionale, geografia ottomana e informazioni sulle scoperte europee. Katip Çelebi (1609-1657) compilò il *Cihannüma* (Panorama del Mondo), una geografia universale che integrava fonti islamiche classiche con opere europee tradotte come l'*Atlas Maior* di Joan Blaeu e la cosmografia di Gerardus Mercator.

Quest'opera simboleggia il periodo di transizione dove la cartografia islamica si confrontava con i rapidi progressi europei, cercando di integrare le due tradizioni in una sintesi che rimaneva però sostanzialmente ricettiva rispetto all'innovazione europea ormai dominante.

Declino e Trasformazione

Dopo il quindicesimo secolo, la cartografia islamica cessò progressivamente di essere all'avanguardia dello sviluppo cartografico globale. Diversi fattori contribuirono a questo declino relativo. La rivoluzione delle esplorazioni europee del quindicesimo-diciassettesimo secolo (circumnavigazione dell'Africa, scoperta delle Americhe, primo giro del mondo) generò un'enorme quantità di nuove informazioni geografiche e stimolò investimenti massicci in cartografia da parte degli stati europei.

La rivoluzione scientifica europea portò progressi in ottica (telescopi per osservazioni astronomiche precise), meccanica (cronometri per determinare la longitudine), e matematica (nuove proiezioni cartografiche, calcolo infinitesimale). L'invenzione della stampa di Gutenberg nel 1450 trasformò la

produzione cartografica in Europa, permettendo diffusione rapida di mappe aggiornate, standardizzazione e riduzione dei costi. Nel mondo islamico, dove la stampa fu adottata molto più tardi (la prima tipografia ottomana fu stabilita solo nel 1727), la cartografia rimase in gran parte manoscritta. Tra il 1450 e il 1600, l'Europa produsse migliaia di mappe stampate con continue riedizioni aggiornate, mentre nel mondo islamico le mappe rimanevano principalmente manoscritte con circolazione limitata.

I cambiamenti geopolitici contribuirono ulteriormente: declino ottomano dal diciassettesimo secolo, colonialismo europeo nel mondo islamico, e perdita di autonomia scientifica e culturale. Nel diciottesimo-diciannovesimo secolo, il mondo islamico iniziò ad adottare metodi cartografici europei. L'Impero Ottomano fondò nel 1795 la Muhendishane-i Berri-i Humayun (Scuola Imperiale di Ingegneria Militare), che adottò metodi europei di cartografia e geodesia, invitando consulenti europei per modernizzare la cartografia militare. In Egitto, Muhammad Ali Pasha (regnante 1805-1848) modernizzò sistematicamente creando un corpo topografico, inviando missioni di studio in Europa, e mappando l'Egitto usando tecniche europee. In Persia l'adozione fu più lenta ma graduale nel diciannovesimo secolo.

Paradossalmente, gran parte della cartografia moderna del mondo islamico fu prodotta dalle potenze coloniali: il Survey of India britannico mappò il subcontinente indiano, il Service Géographique de l'Armée francese mappò il Nord Africa, e varie missioni olandesi mapparono l'Indonesia. Queste mappe servivano scopi coloniali di controllo territoriale, sfruttamento delle risorse, amministrazione e operazioni militari, ma crearono anche la base cartografica moderna di queste regioni.

Conclusioni: Valutazione Storica

La cartografia araba medievale non fu semplicemente un custode passivo dell'eredità classica. I suoi contributi distintivi includevano una sintesi culturale che integrava tradizioni greche, persiane, indiane e pratiche proprie; un'estensione geografica che documentò regioni non conosciute dai greci come l'Asia centrale, l'Oceano Indiano con navigazione sistematica, l'Africa orientale e subsahariana, e il sud-est asiatico; metodi matematici raffinati come la trigonometria sferica avanzata, correzioni delle coordinate tolemaiche, e determinazione accurata del raggio terrestre; una geografia funzionale con la tradizione Balkhi che sviluppò una concezione dello spazio alternativa enfatizzando relazioni topologiche e distanze temporali; e strumentazione sofisticata con il perfezionamento dell'astrolabio, lo sviluppo del kamal nautico, e tecniche di osservazione astronomica per geodesia.

Rispetto alla cartografia europea medievale, la cartografia araba fu generalmente superiore fino al tredicesimo-quattordicesimo secolo, con base

matematica forte mantenendo la tradizione tolemaica mentre l'Europa l'aveva persa, estensione geografica maggiore, accuratezza moderata-alta per regioni centrali contro bassa accuratezza europea con mappe simboliche, stretta integrazione con astronomia, e approccio sia scientifico che descrittivo contro l'approccio principalmente simbolico-religioso europeo. Dopo il quattordicesimo secolo, la situazione si invertì progressivamente.

Rispetto alla cartografia cinese, che seguì un percorso parallelo ma indipendente, i punti di forza cinesi includevano mappe topografiche molto dettagliate per scopi amministrativi, un sistema di coordinate rettangolari già dal terzo secolo, e tecniche di stampa xilografica dal nono secolo. I punti di forza arabi includevano maggiore integrazione con astronomia matematica, conoscenza più estesa dell'Oceano Indiano, e sintesi di tradizioni multiple. Limiti comuni erano determinazione imprecisa della longitudine, conoscenza limitata dell'emisfero sud, e assenza di teoria fisica della Terra.

La cartografia araba operò come scienza normale nel senso che operava entro un paradigma stabile (Terra sferica, sistema tolemaico di coordinate e proiezioni, divisione in climi, metodi trigonometrici standard), risolveva problemi specifici (correzione di coordinate, determinazione della qibla, mappatura di nuove regioni, compilazione di tavole più accurate), accumulava conoscenza incrementalmente con ogni generazione che migliorava leggermente la precisione, e non cercava rivoluzioni paradigmatiche ma raffinava piuttosto che rivoluzionare.

Perché non avvenne una rivoluzione cartografica nel mondo islamico? I fattori proposti includono elementi epistemologici (enfasi sulla trasmissione del sapere autorevole), fattori tecnologici (adozione tardiva della stampa, mancanza di cronometri accurati), fattori economici e geopolitici (declino del commercio terrestre con apertura delle rotte oceaniche europee, frammentazione politica, invasioni mongole, competizione meno intensa tra stati), e probabilmente una combinazione di contingenze multiple: tempistica storica, configurazione geografica, competizione inter-statale europea, e casualità storica.

La cartografia araba medievale rappresenta un capitolo essenziale nella lunga storia umana dello sforzo di comprendere e rappresentare lo spazio geografico. Non fu un semplice preludio alla cartografia moderna, ma un'espressione significativa e originale di una civiltà ricca e complessa nella sua relazione cognitiva con il mondo. I suoi metodi matematici, le sue osservazioni empiriche, i suoi strumenti raffinati, e persino le sue concezioni alternative dello spazio contribuirono al patrimonio scientifico dell'umanità. La sua eredità vive nei termini che usiamo, nelle stelle che nominiamo, nei concetti matematici che applichiamo, e nella consapevolezza che la scienza è sempre stata un'impresa trans-culturale, dove conoscenze e tecniche circolano attraverso confini linguistici, religiosi e politici, arricchendosi

reciprocamente nel processo.

La storia della cartografia araba ci ricorda che il progresso scientifico non è lineare né monopolio di una singola civiltà. Periodi di fioritura alternano a periodi di stagnazione, centri di innovazione si spostano geograficamente, e ciò che oggi sembra ovvio fu un tempo una scoperta rivoluzionaria ottenuta con ingegno, pazienza e dedizione da studiosi le cui motivazioni erano tanto intellettuali quanto pratiche, tanto spirituali quanto materiali. In un'epoca di rinnovato dialogo tra culture, riscoprire questa storia non è mero esercizio antiquario, ma riconoscimento di radici comuni e ispirazione per una scienza autenticamente universale.

Appendice Tecnica e Matematica: Principi della Cartografia Araba Medievale

NOTA PRELIMINARE: Questa appendice ha scopo pedagogico e illustrativo. Le formule e i metodi qui presentati descrivono i principi matematici e geometrici che sottendono le tecniche cartografiche e astronomiche arabe medievali, espressi in notazione matematica moderna per facilitare la comprensione. Non si tratta di citazioni dirette dalle fonti originali, ma di ricostruzioni moderne basate sui principi generali documentati nella letteratura storiografica. Per verifiche rigorose delle procedure storiche effettive, si rimanda alle edizioni critiche delle opere originali e alla letteratura secondaria specialistica.

I. Fondamenti di Trigonometria Sferica

1.1 La Sfera Terrestre e le Coordinate

La Terra è approssimabile come una sfera di raggio $R \approx 6.371$ km. Un punto sulla superficie terrestre è identificato da due coordinate angolari:

Latitudine φ : angolo tra il piano equatoriale e la verticale del punto, misurato in gradi da -90° (polo sud) a $+90^\circ$ (polo nord)

Longitudine λ : angolo tra un meridiano di riferimento e il meridiano del punto, misurato in gradi da -180° a $+180^\circ$

Distanza lungo un meridiano:

Un grado di latitudine corrisponde a una distanza sulla superficie terrestre di:

$$d_{\text{lat}} = (2\pi \times R) / 360^\circ \approx 111,32 \text{ km}$$

Questa distanza è approssimativamente costante per tutti i meridiani.

Distanza lungo un parallelo:

Un grado di longitudine corrisponde a una distanza che varia con la latitudine:

$$d_{\text{lon}}(\varphi) = (2\pi \times R \times \cos(\varphi)) / 360^\circ \approx 111,32 \times \cos(\varphi) \text{ km}$$

All'equatore ($\varphi = 0^\circ$): $d_{\text{lon}} = 111,32 \text{ km}$

A $\varphi = 30^\circ$: $d_{\text{lon}} \approx 96,4 \text{ km}$

A $\varphi = 60^\circ$: $d_{\text{lon}} \approx 55,7 \text{ km}$

Questo fenomeno era ben compreso dai geografi arabi e spiega perché gli errori longitudinali sono più significativi alle basse latitudini.

1.2 Triangoli Sferici e Leggi Fondamentali

Un triangolo sferico è formato da tre archi di cerchio massimo sulla superficie di una sfera. I suoi elementi sono:

Tre lati a, b, c (misurati come angoli dal centro della sfera, in radianti o gradi)

Tre angoli A, B, C (agli vertici del triangolo)

Legge dei Seni Sferici:

$$\sin(a) / \sin(A) = \sin(b) / \sin(B) = \sin(c) / \sin(C)$$

Questa legge è fondamentale per risolvere triangoli sferici quando sono noti alcuni elementi e si vogliono calcolare gli altri.

Legge dei Coseni Sferici (per i lati):

$$\cos(a) = \cos(b) \times \cos(c) + \sin(b) \times \sin(c) \times \cos(A)$$

Questa formula permette di calcolare il terzo lato di un triangolo sferico conoscendo due lati e l'angolo compreso, o viceversa.

Legge dei Coseni Sferici (per gli angoli):

$$\cos(A) = -\cos(B) \times \cos(C) + \sin(B) \times \sin(C) \times \cos(a)$$

1.3 Calcolo della Distanza tra Due Punti

Date due località con coordinate (φ_1, λ_1) e (φ_2, λ_2) , la distanza angolare α (misurata come angolo dal centro della Terra) è data dalla formula del coseno sferico:

$$\cos(\alpha) = \sin(\varphi_1) \times \sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \times \cos(\varphi_2) \times \cos(\Delta\lambda)$$

dove $\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1|$ è la differenza di longitudine.

La distanza effettiva sulla superficie è:

$$d = R \times \alpha$$

dove α deve essere espresso in radianti (per convertire da gradi a radianti:

$$\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{gradi}} \times \pi/180).$$

Esempio numerico:

Baghdad (33,33° N, 44,40° E) e Cairo (30,03° N, 31,23° E)

$$\Delta\lambda = 44,40^\circ - 31,23^\circ = 13,17^\circ$$

Conversione in radianti:

$$\varphi_1 = 33,33^\circ \times \pi/180 = 0,5817 \text{ rad}$$

$$\varphi_2 = 30,03^\circ \times \pi/180 = 0,5240 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = 13,17^\circ \times \pi/180 = 0,2299 \text{ rad}$$

Calcolo:

$$\cos(\alpha) = \sin(0,5817) \times \sin(0,5240) + \cos(0,5817) \times \cos(0,5240) \times \cos(0,2299)$$

$$\cos(\alpha) = 0,5495 \times 0,5000 + 0,8355 \times 0,8660 \times 0,9736$$

$$\cos(\alpha) = 0,2748 + 0,7042 = 0,9790$$

$$\alpha = \arccos(0,9790) = 0,2045 \text{ rad} = 11,72^\circ$$

$$d = 6.371 \times 0,2045 = 1.303 \text{ km}$$

(La distanza effettiva misurata oggi è circa 1.290 km, quindi l'errore è < 1%)

1.4 Formula di Haversine (Alternativa più Stabile)

Per evitare problemi numerici con distanze piccole, si può usare la formula di Haversine:

$$\text{hav}(\alpha) = \text{hav}(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(\varphi_1) \times \cos(\varphi_2) \times \text{hav}(\Delta\lambda)$$

$$\text{dove } \text{hav}(\theta) = \sin^2(\theta/2) = (1 - \cos(\theta))/2$$

Questa formula è numericamente più stabile per calcoli computazionali, anche se probabilmente non era la forma usata dai matematici medievali.

II. Determinazione della Latitudine

2.1 Metodo dell'Altezza Meridiana del Sole

Principio: A mezzogiorno solare locale (culminazione meridiana), il Sole raggiunge la sua massima altezza h sopra l'orizzonte. Questa altezza dipende dalla latitudine φ e dalla declinazione solare δ .

Formula fondamentale:

$$\varphi = 90^\circ - h + \delta \text{ (emisfero nord, Sole a sud dello zenit)}$$

Derivazione:

L'angolo zenitale z (distanza angolare del Sole dallo zenit) è:

$$z = 90^\circ - h$$

Per la geometria della sfera celeste:

$$z = |\varphi - \delta|$$

Se $\varphi > \delta$ (caso tipico per osservatori a latitudini medie nell'emisfero nord):

$$90^\circ - h = \varphi - \delta$$

$$\varphi = 90^\circ - h + \delta$$

La declinazione solare:

La declinazione del Sole varia durante l'anno secondo un ciclo annuale. Una

formula approssimativa moderna è:

$$\delta \approx 23,44^\circ \times \sin(360^\circ \times (N - 81) / 365,25)$$

dove N è il giorno dell'anno (1 gennaio = 1).

Valori notevoli:

Equinozio di primavera (≈ 21 marzo, $N \approx 80$): $\delta \approx 0^\circ$

Solstizio d'estate (≈ 21 giugno, $N \approx 172$): $\delta \approx +23,44^\circ$

Equinozio d'autunno (≈ 23 settembre, $N \approx 266$): $\delta \approx 0^\circ$

Solstizio d'inverno (≈ 21 dicembre, $N \approx 355$): $\delta \approx -23,44^\circ$

Gli astronomi arabi compilavano tavole accurate della declinazione solare per ogni giorno dell'anno basate su osservazioni prolungate.

Esempio pratico:

Supponiamo un'osservazione il 21 marzo (equinozio, $\delta \approx 0^\circ$):

Altezza meridiana misurata: $h = 52,5^\circ$

Latitudine calcolata: $\varphi = 90^\circ - 52,5^\circ + 0^\circ = 37,5^\circ \text{ N}$

Questa sarebbe la latitudine approssimativa di città come Atene, Palermo meridionale, o regioni dell'Asia centrale.

2.2 Metodo della Stella Polare

La stella polare (Polaris, α Ursae Minoris) si trova molto vicina al polo nord celeste. La sua altezza sopra l'orizzonte nord è approssimativamente uguale alla latitudine dell'osservatore:

$$h_{\text{Polaris}} \approx \varphi$$

Questa relazione è valida con buona approssimazione (errore $< 1^\circ$ per l'epoca medievale, quando Polaris era leggermente più distante dal polo di quanto non sia oggi).

Correzioni:

In realtà, Polaris orbita attorno al polo celeste con un piccolo raggio angolare (nel Medioevo circa $3-4^\circ$, oggi circa $0,7^\circ$ a causa della precessione degli equinozi). Per misurazioni precise, si doveva:

Osservare Polaris alla culminazione superiore o inferiore

Applicare piccole correzioni basate sulla posizione delle "guardie" (β e γ Ursae Minoris)

Le tavole astronomiche arabe includevano correzioni per ottenere la latitudine precisa dall'altezza di Polaris in diverse configurazioni circumpolare.

III. Determinazione della Longitudine

3.1 Il Problema Fondamentale

La longitudine è intrinsecamente più difficile da determinare della latitudine perché richiede la conoscenza precisa del tempo. La Terra ruota di 360° in 24 ore, quindi:

$$\Delta\lambda = \Delta t \times 15^\circ/\text{ora} = \Delta t \times 0,25^\circ/\text{min}$$

dove Δt è la differenza di tempo locale tra due luoghi.

Un errore di 4 minuti nel tempo corrisponde a 1° di longitudine (circa 111 km all'equatore, meno alle latitudini più alte).

3.2 Metodo delle Eclissi Lunari

Le eclissi lunari sono visibili simultaneamente da tutti i luoghi dove la Luna è sopra l'orizzonte (circa metà del globo). Se due osservatori in luoghi diversi registrano l'ora locale dello stesso evento dell'eclissi (inizio, massimo, fine), la differenza di tempo corrisponde alla differenza di longitudine.

Procedura:

Osservatore A (longitudine λ_1) registra l'eclissi all'ora locale t_1

Osservatore B (longitudine λ_2) registra l'eclissi all'ora locale t_2

Differenza di longitudine: $\Delta\lambda = (t_2 - t_1) \times 15^\circ/\text{ora}$

Limitazioni pratiche:

Le eclissi lunari sono relativamente rare (circa 2-3 all'anno visibili da un dato luogo)

Determinare il momento preciso di un evento dell'eclissi era difficile (incertezza ± 10 -30 minuti)

Questo introduceva errori di $2,5^\circ$ - $7,5^\circ$ in longitudine

Esempio:

Se l'osservatore A registra l'inizio dell'eclissi alle 21:30 ora locale, e l'osservatore B alle 22:45 ora locale:

$$\Delta t = 22:45 - 21:30 = 1 \text{ ora } 15 \text{ minuti} = 1,25 \text{ ore}$$

$$\Delta\lambda = 1,25 \times 15^\circ = 18,75^\circ$$

3.3 Metodo delle Distanze Itinerarie

Se una carovana viaggia da A a B lungo un percorso di lunghezza d in direzione azimutale α (misurata in senso orario dal nord), le variazioni di coordinate sono approssimativamente:

$$\Delta\varphi \approx (d / R) \times \cos(\alpha) \times (180^\circ / \pi)$$

$$\Delta\lambda \approx (d / R) \times \sin(\alpha) / \cos(\varphi_{\text{media}}) \times (180^\circ / \pi)$$

dove φ_{media} è la latitudine media del percorso.

Derivazione:

Su una sfera, un piccolo spostamento in direzione α di lunghezza infinitesima ds produce:

$$\text{Variazione di latitudine: } d\varphi = (ds / R) \times \cos(\alpha)$$

$$\text{Variazione di longitudine: } d\lambda = (ds / R) \times \sin(\alpha) / \cos(\varphi)$$

Integrando su un percorso di lunghezza finita d (approssimazione valida per $d \ll R$):

$$\Delta\varphi = d \times \cos(\alpha) / R$$

$$\Delta\lambda = d \times \sin(\alpha) / (R \times \cos(\varphi))$$

Esempio:

Percorso di 500 km verso est ($\alpha = 90^\circ$) da latitudine $\varphi = 35^\circ$ N:

$$\Delta\varphi = 500.000 \times \cos(90^\circ) / 6.371.000 \times (180^\circ / \pi) \approx 0^\circ \text{ (nessun movimento in latitudine)}$$

$$\Delta\lambda = 500.000 \times \sin(90^\circ) / (6.371.000 \times \cos(35^\circ)) \times (180^\circ / \pi)$$

$$\Delta\lambda \approx 500.000 / (6.371.000 \times 0,8192) \times 57,296^\circ \approx 5,50^\circ$$

Limitazioni:

Difficile mantenere una direzione costante per lunghe distanze

Errori accumulati nelle misurazioni di distanza (tipicamente 1-2% per misurazioni con catene)

Necessità di correzioni per terreno irregolare

IV. Misurazione del Raggio Terrestre

4.1 Metodo di al-Biruni (Depressione dell'Orizzonte)

Questo metodo elegante richiede solo:

Un punto elevato di altezza h nota sopra il livello del mare

Misurazione dell'angolo di depressione θ dell'orizzonte

Geometria del problema:

Consideriamo:

O = centro della Terra

A = base della montagna (al livello del mare)

C = osservatore in cima alla montagna

B = punto all'orizzonte dove la linea di vista è tangente alla superficie terrestre

Distanze:

$|OA| = R$ (raggio terrestre)

$|OC| = R + h$ (distanza dal centro all'osservatore)

$|OB| = R$ (raggio al punto di tangenza)

Angolo CBO = 90° (condizione di tangenza)

Dal triangolo rettangolo OBC, l'angolo AOC = α può essere determinato:

$$\cos(\alpha) = |OB| / |OC| = R / (R + h)$$

L'angolo di depressione θ misurato dall'osservatore è geometricamente uguale ad α , quindi:

$$\cos(\theta) = R / (R + h)$$

Risolvendo per R:

$$R \times (1 + h/R) = R / \cos(\theta)$$

$$R + h = R / \cos(\theta)$$

$$R \times \cos(\theta) + h \times \cos(\theta) = R$$

$$R \times (1 - \cos(\theta)) = h \times \cos(\theta)$$

$$R = h \times \cos(\theta) / (1 - \cos(\theta))$$

Formula alternativa usando identità trigonometriche:

Usando l'identità $1 - \cos(\theta) = 2 \times \sin^2(\theta/2)$:

$$R = h \times \cos(\theta) / (2 \times \sin^2(\theta/2))$$

Per angoli piccoli ($\theta \ll 1$ radiante), usando $\sin(\theta/2) \approx \theta/2$:

$$R \approx h \times \cos(\theta) / (2 \times (\theta/2)^2) = 2h \times \cos(\theta) / \theta^2$$

Esempio numerico (basato su parametri plausibili per al-Biruni):

Altezza della montagna: $h = 305$ m

Angolo di depressione misurato: $\theta = 0,566^\circ = 0,00988$ rad

$$R = 305 \times \cos(0,566^\circ) / (1 - \cos(0,566^\circ))$$

$$R = 305 \times 0,99995 / (1 - 0,99995)$$

$$R = 304,985 / 0,00005$$

$$R \approx 6.099.700 \text{ m} \approx 6.100 \text{ km}$$

$$\text{Circonferenza: } C = 2\pi \times R \approx 38.320 \text{ km}$$

Valore moderno: $C \approx 40.075$ km (equatoriale)

Differenza: circa 4,4% (spiegabile con errori di misurazione e ellissoidalità terrestre)

4.2 Metodo di Eratostene (Arco Meridiano)

Questo metodo, già noto nell'antichità e replicato dagli astronomi di al-Ma'mun, richiede:

Due località A e B sullo stesso meridiano (o approssimativamente)

Misurazione della differenza di latitudine $\Delta\varphi$ tra A e B
 Misurazione della distanza terrestre d tra A e B

Relazione:

$$d / \Delta\varphi = C / 360^\circ$$

dove C è la circonferenza terrestre e gli angoli sono in gradi.

Quindi:

$$C = 360^\circ \times d / \Delta\varphi$$

Esempio (misurazioni sotto al-Ma'mun):

Differenza di latitudine: $\Delta\varphi = 1^\circ$ (ottenuta misurando quando l'altezza di Polaris cambia di 1°)

Distanza misurata: $d \approx 111$ km (valore approssimativo dalle fonti storiche)

$$C = 360^\circ \times 111 \text{ km} / 1^\circ = 39.960 \text{ km}$$

(Notevolmente vicino al valore reale di circa 40.000 km)

Analisi degli errori:

Principali fonti di errore:

Misurazione della distanza terrestre (errore tipico 1-2%)

Deviazione dal meridiano perfetto durante il viaggio

Precisione della misurazione angolare (± 10 -15 minuti d'arco = $\pm 0,17$ -0,25°)

Se $\Delta\varphi$ ha un errore di $\pm 0,2^\circ$:

$$\text{Errore relativo su } C = \pm 0,2^\circ / 1^\circ = \pm 20\%$$

Questo spiega perché ottenere risultati accurati richiedeva misurazioni molto attente e tecniche di media.

V. Calcolo della Qibla

5.1 Formulazione del Problema

Determinare la direzione della qibla significa calcolare l'azimut iniziale A del cerchio massimo che connette la posizione dell'osservatore (φ_1, λ_1) alla Mecca (φ_2, λ_2) .

L'azimut è l'angolo misurato in senso orario dal nord geografico.

5.2 Formula Generale

La formula deriva dalla risoluzione del triangolo sferico formato da:

Polo nord

Posizione dell'osservatore

Mecca

Formula dell'azimut:

$$\tan(A) = \sin(\Delta\lambda) / [\cos(\varphi_1) \times \tan(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \times \cos(\Delta\lambda)]$$

dove $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ (differenza di longitudine, positiva se la Mecca è a est)

Formula alternativa (più stabile numericamente):

$$A = \arctan2(y, x)$$

dove:

$$y = \sin(\Delta\lambda) \times \cos(\varphi_2)$$

$$x = \cos(\varphi_1) \times \sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \times \cos(\varphi_2) \times \cos(\Delta\lambda)$$

La funzione $\arctan2(y, x)$ restituisce l'angolo nel quadrante corretto (-180° a $+180^\circ$).

5.3 Esempio: Qibla da Baghdad

Coordinate:

Baghdad: $\varphi_1 = 33,33^\circ$ N, $\lambda_1 = 44,40^\circ$ E

Mecca: $\varphi_2 = 21,42^\circ$ N, $\lambda_2 = 39,83^\circ$ E

Differenza di longitudine:

$$\Delta\lambda = 39,83^\circ - 44,40^\circ = -4,57^\circ \text{ (la Mecca è a ovest)}$$

Conversione in radianti:

$$\varphi_1 = 0,5817 \text{ rad}$$

$$\varphi_2 = 0,3738 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = -0,0798 \text{ rad}$$

Calcolo dei componenti:

$$y = \sin(-0,0798) \times \cos(0,3738)$$

$$y = -0,0796 \times 0,9311 = -0,0741$$

$$x = \cos(0,5817) \times \sin(0,3738) - \sin(0,5817) \times \cos(0,3738) \times \cos(-0,0798)$$

$$x = 0,8355 \times 0,3653 - 0,5495 \times 0,9311 \times 0,9968$$

$$x = 0,3052 - 0,5100 = -0,2048$$

$$A = \arctan2(-0,0741, -0,2048)$$

Poiché sia y che x sono negativi, l'angolo è nel terzo quadrante ($180^\circ - 270^\circ$):

$$A \approx 180^\circ + \arctan(0,0741 / 0,2048) \approx 180^\circ + 19,9^\circ \approx 200^\circ$$

In termini di direzione cardinale: circa 200° dal nord = circa 20° a sud dell'ovest = S 20° W

5.4 Approssimazione per Distanze Brevi

Per distanze relativamente brevi (< 1.000 km), si può usare l'approssimazione planare con correzione per la convergenza dei meridiani:

$$A \approx \arctan(\Delta\lambda \times \cos(\varphi_{\text{media}}) / \Delta\varphi)$$

dove:

$$\varphi_{\text{media}} = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Per l'esempio Baghdad-Mecca:

$$\Delta\varphi = 21,42^\circ - 33,33^\circ = -11,91^\circ$$

$$\varphi_{\text{media}} = (33,33^\circ + 21,42^\circ) / 2 = 27,38^\circ$$

$$\Delta\lambda \times \cos(\varphi_{\text{media}}) = -4,57^\circ \times \cos(27,38^\circ) = -4,57^\circ \times 0,8883 = -4,06^\circ$$

$$A \approx \arctan(-4,06^\circ / -11,91^\circ) = \arctan(0,341) \approx 18,8^\circ$$

Direzione: circa S 19° W (ragionevolmente vicina al calcolo esatto di S 20° W)

L'errore dell'approssimazione è circa 1°, accettabile per molti scopi pratici.

VI. Proiezioni Cartografiche

6.1 Il Problema Fondamentale

Una superficie sferica di raggio R ha curvatura gaussiana $K = 1/R^2 > 0$ in ogni punto. Un piano ha curvatura $K = 0$. Il Theorema Egregium di Gauss (1828) dimostra che la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco: non può essere modificata da deformazioni che preservano le distanze locali.

Conseguenza: È impossibile mappare una sfera su un piano preservando simultaneamente tutte le distanze, tutte le aree, e tutti gli angoli.

Scelte necessarie:

Proiezioni conformi: preservano angoli localmente, distorcono aree

Proiezioni equivalenti (equi-areali): preservano aree, distorcono angoli

Proiezioni equidistanti: preservano distanze lungo certe direzioni specifiche

Proiezioni di compromesso: non preservano perfettamente nessuna proprietà, ma minimizzano le distorsioni complessive

6.2 Proiezione Stereografica (usata negli Astrolabi)

Costruzione geometrica:

Punto di proiezione: polo sud S della sfera

Piano di proiezione: piano equatoriale

Un punto P sulla sfera è proiettato nel punto P' dove la linea SP interseca il piano equatoriale

Formule matematiche:

Per un punto sulla sfera con coordinate sferiche (θ , φ) dove θ è la distanza polare (colatitudine = 90° - latitudine) e φ è l'azimut:

$$x = 2R \times \tan(\theta/2) \times \cos(\varphi)$$

$$y = 2R \times \tan(\theta/2) \times \sin(\varphi)$$

O equivalentemente, in coordinate polari (r' , φ) sul piano:

$$r' = 2R \times \tan(\theta/2)$$

Proprietà:

Conforme: Gli angoli sono preservati localmente

Cerchi → Cerchi: Tutti i cerchi sulla sfera sono mappati su cerchi o linee rette nel piano

Il polo nord è al centro ($r' = 0$)

L'equatore è un cerchio di raggio $r' = 2R$

Distorsione crescente: Le aree aumentano allontanandosi dal centro

Fattore di scala:

Il fattore di scala λ (rapporto tra distanze sulla mappa e distanze reali sulla sfera) è:

$$\lambda = 2 / (1 + \cos(\theta)) = 1 / \cos^2(\theta/2) = \sec^2(\theta/2)$$

Al polo nord ($\theta = 0^\circ$): $\lambda = 1$ (nessuna distorsione)

A $\theta = 60^\circ$: $\lambda = 1,33$ (33% di ingrandimento)

A $\theta = 90^\circ$ (equatore): $\lambda = 2$ (100% di ingrandimento)

Perché questa proiezione per gli astrolabi:

Preserva gli angoli (essenziale per calcoli astronomici)

I cerchi di altitudine e azimut sulla sfera celeste diventano cerchi sul piano (facili da costruire meccanicamente)

Relativamente semplice da calcolare e costruire

6.3 Proiezione Cilindrica Semplice

Costruzione:

La sfera è avvolta in un cilindro tangente all'equatore. I punti sono proiettati radialmente dal centro della sfera sul cilindro. Il cilindro è poi "svolto" su un piano.

Formule:

$$x = R \times \lambda$$

$$y = R \times \varphi$$

dove λ è la longitudine e φ la latitudine (entrambe in radianti).

Proprietà:

Meridiani e paralleli sono linee rette perpendicolari
 Le distanze lungo i meridiani sono corrette
 Le distanze lungo i paralleli sono corrette solo all'equatore
 Enormi distorsioni alle alte latitudini

Fattori di scala:

Lungo i meridiani: $k_m = 1$ (scala corretta)

Lungo i paralleli: $k_p = \sec(\varphi) = 1 / \cos(\varphi)$

All'equatore ($\varphi = 0^\circ$): $k_p = 1$ (nessuna distorsione)

A $\varphi = 30^\circ$: $k_p = 1,155$ (15,5% di allungamento est-ovest)

A $\varphi = 60^\circ$: $k_p = 2,000$ (100% di allungamento)

A $\varphi = 80^\circ$: $k_p = 5,759$ (476% di allungamento!)

6.4 Proiezione Cilindrica Equi-rettangolare (possibile per al-Idrisi)

Formule:

$$x = R \times \lambda \times \cos(\varphi_0)$$

$$y = R \times \varphi$$

dove φ_0 è un parallelo standard scelto (spesso la latitudine media della regione da mappare).

Proprietà:

Le distanze lungo i meridiani sono corrette

Le distanze lungo il parallelo φ_0 sono corrette

Compromesso migliore della cilindrica semplice per regioni di latitudine media

Fattori di scala:

Lungo i meridiani: $k_m = 1$

Lungo i paralleli: $k_p = \cos(\varphi_0) / \cos(\varphi)$

Se $\varphi_0 = 35^\circ$ (latitudine media del Mediterraneo):

A $\varphi = 30^\circ$: $k_p = 0,8192 / 0,8660 = 0,946$ (5,4% di restringimento)

A $\varphi = 35^\circ$: $k_p = 1,000$ (nessuna distorsione)

A $\varphi = 40^\circ$: $k_p = 0,8192 / 0,7660 = 1,069$ (6,9% di allungamento)

Questo spiega l'accuratezza ragionevole delle mappe di al-Idrisi per il Mediterraneo.

6.5 Proiezione Conica Semplice (tolemaica)

Costruzione geometrica:

Un cono è posizionato tangente alla sfera lungo un parallelo standard φ_0 . I punti sono proiettati dal centro della sfera sul cono. Il cono è poi "svolto" su un piano.

Formule:

$$x = \rho \times \sin(n \times (\lambda - \lambda_0))$$

$$y = \rho_0 - \rho \times \cos(n \times (\lambda - \lambda_0))$$

dove:

$n = \sin(\varphi_0)$ è la costante del cono
 $\rho = R \times [\cot(\varphi_0) + (\varphi_0 - \varphi)]$ è il raggio polare
 $\rho_0 = R \times \cot(\varphi_0)$ è il raggio al parallelo standard
 λ_0 è il meridiano centrale

Proprietà:

I meridiani sono linee rette convergenti verso un punto (proiezione del polo)
 I paralleli sono archi di cerchi concentrici
 Il parallelo standard φ_0 non ha distorsioni
 Compromesso ragionevole per regioni di latitudine media

Fattori di scala:

Lungo i meridiani: $k_m = n / \sin(\varphi)$

Lungo i paralleli: $k_p = n / \sin(\varphi)$

Al parallelo standard φ_0 : $k_m = k_p = 1$ (nessuna distorsione)

Per $\varphi_0 = 35^\circ$:

A $\varphi = 30^\circ$: $k_m = k_p = 0,574 / 0,500 = 1,148$ (14,8% di ingrandimento)

A $\varphi = 35^\circ$: $k_m = k_p = 1,000$

A $\varphi = 40^\circ$: $k_m = k_p = 0,574 / 0,643 = 0,893$ (10,7% di restringimento)

VII. Navigazione e Strumentazione

7.1 Il Kamal: Geometria della Misurazione

Il kamal consiste di:

Tavoletta rettangolare di altezza h (tipicamente 5-10 cm)

Filo con nodi a intervalli regolari di lunghezza $d_1, d_2, d_3, \dots$ (tipicamente da 30 a 80 cm)

Principio geometrico:

L'osservatore tiene il filo teso con i denti al nodo i , posizionando la tavoletta a distanza d_i dall'occhio. Allinea il bordo inferiore con l'orizzonte e il bordo superiore con la stella. L'angolo θ sotteso dalla tavoletta è l'altezza della

stella sopra l'orizzonte.

Formula dell'angolo:

Per una tavoletta di altezza h a distanza d :

$$\tan(\theta/2) = (h/2) / d$$

Per angoli piccoli ($\theta < 20^\circ$), l'approssimazione $\tan(\theta/2) \approx \theta/2$ (con θ in radianti) dà:

$$\theta \approx h / d \text{ (radianti)}$$

O in gradi:

$$\theta \approx (h / d) \times (180^\circ / \pi) \approx (h / d) \times 57,296^\circ$$

Esempi numerici:

Tavoletta $h = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$

Nodo 1: $d_1 = 30 \text{ cm} = 0,30 \text{ m}$

$$\theta_1 = 0,06 / 0,30 \times 57,296^\circ \approx 11,5^\circ$$

Nodo 2: $d_2 = 40 \text{ cm} = 0,40 \text{ m}$

$$\theta_2 = 0,06 / 0,40 \times 57,296^\circ \approx 8,6^\circ$$

Nodo 3: $d_3 = 60 \text{ cm} = 0,60 \text{ m}$

$$\theta_3 = 0,06 / 0,60 \times 57,296^\circ \approx 5,7^\circ$$

Nodo 4: $d_4 = 80 \text{ cm} = 0,80 \text{ m}$

$$\theta_4 = 0,06 / 0,80 \times 57,296^\circ \approx 4,3^\circ$$

Utilizzo per la navigazione longitudinale:

Se un marinaio sa che il porto di destinazione si trova a latitudine $\varphi = 8,6^\circ \text{ N}$, userà il nodo 2. Quando Polaris appare allineata con la tavoletta al nodo 2, la nave si trova alla latitudine corretta e può navigare verso est o ovest lungo quel parallelo fino a raggiungere la costa.

Precisione:

La precisione dipende da:

Accuratezza della costruzione dello strumento ($\pm 5\text{-}10\%$)

Stabilità della posizione sulla nave ($\pm 0,5^\circ\text{-}1^\circ$ a causa del rollio)

Rifrazione atmosferica vicino all'orizzonte ($\pm 0,3^\circ\text{-}0,5^\circ$)

Precisione totale stimata: $\pm 1^\circ\text{-}2^\circ$ di latitudine ($\pm 110\text{-}220 \text{ km}$)

Questa precisione era sufficiente per la navigazione costiera e tra porti noti, specialmente quando integrata con altri metodi (osservazione di correnti, uccelli, profondità del mare, colore dell'acqua).

7.2 Quadrato delle Ombre sull'Astrolabio

Struttura:

Due scale graduate da 0 a 12 su quadranti perpendicolari:

Umbra recta (ombra dritta): Scala orizzontale, rappresenta $\tan(h)$

Umbra versa (ombra inversa): Scala verticale, rappresenta $\cot(h)$

dove h è l'angolo di elevazione.

Normalizzazione:

Le scale sono normalizzate a base 12:

$$\text{umbra_recta} = 12 \times \tan(h)$$

$$\text{umbra_versa} = 12 \times \cot(h)$$

Relazione geometrica:

Per un triangolo rettangolo con base b e altezza H :

$$\tan(h) = H / b$$

Se leggiamo $\text{umbra_recta} = u_r$ sull'astrolabio:

$$\tan(h) = u_r / 12$$

Quindi:

$$H / b = u_r / 12$$

$$H = b \times (u_r / 12)$$

Esempio pratico: Misurazione dell'altezza di un minareto

Procedura:

Misurarsi a distanza $b = 25$ m dalla base del minareto

Puntare l'alidada verso la cima

Leggere sulla scala umbra recta: $u_r = 9$

Calcolo:

$$H = 25 \times (9 / 12) = 25 \times 0,75 = 18,75 \text{ m}$$

Verifica:

$$\tan(h) = 9 / 12 = 0,75$$

$$h = \arctan(0,75) \approx 36,87^\circ$$

Controllo:

$$H = b \times \tan(h) = 25 \times \tan(36,87^\circ) = 25 \times 0,75 = 18,75 \text{ m}$$

Uso dell'umbra versa per angoli ripidi:

Per angoli $h > 45^\circ$, la tangente diventa molto grande (tende a infinito per $h \rightarrow 90^\circ$), rendendo difficile la lettura. In questi casi si usa l'umbra versa:

$$\text{umbra_versa} = 12 \times \cot(h)$$

Per un triangolo con base b e altezza H :

$$\cot(h) = b / H$$

Se leggiamo $\text{umbra_versa} = u_v$:

$$\cot(h) = u_v / 12$$

$$b / H = u_v / 12$$

$$H = b \times (12 / u_v)$$

Esempio con angolo ripido:

Distanza $b = 15$ m

Lettura umbra_versa = 4

$$H = 15 \times (12 / 4) = 15 \times 3 = 45 \text{ m}$$

Verifica:

$$\cot(h) = 4 / 12 = 0,333$$

$$h = \operatorname{arccot}(0,333) = \arctan(3) \approx 71,57^\circ$$

$$H = b \times \tan(71,57^\circ) = 15 \times 3 = 45 \text{ m}$$

7.3 Misurazione di Distanze Inaccessibili per Triangolazione

Problema: Determinare la distanza AC a un punto C inaccessibile (ad esempio una vetta dall'altra parte di un fiume).

Procedura:

Stabilire una base AB di lunghezza b nota

Da A, misurare l'angolo $\alpha = \angle CAB$ verso il punto C

Da B, misurare l'angolo $\beta = \angle ABC$ verso il punto C

Calcolare l'angolo $\gamma = \angle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$

Formule dalla legge dei seni:

Nel triangolo ABC:

$$AC / \sin(\beta) = AB / \sin(\gamma)$$

Quindi:

$$AC = b \times \sin(\beta) / \sin(\gamma) = b \times \sin(\beta) / \sin(\alpha + \beta)$$

Analogamente:

$$BC = b \times \sin(\alpha) / \sin(\alpha + \beta)$$

Esempio numerico:

Base: $b = 150$ m

Angolo da A: $\alpha = 58^\circ$

Angolo da B: $\beta = 47^\circ$

Angolo in C: $\gamma = 180^\circ - 58^\circ - 47^\circ = 75^\circ$

$$AC = 150 \times \sin(47^\circ) / \sin(75^\circ)$$

$$AC = 150 \times 0,7314 / 0,9659$$

$$AC = 109,71 / 0,9659$$

$$AC \approx 113,6 \text{ m}$$

$$BC = 150 \times \sin(58^\circ) / \sin(75^\circ)$$

$$BC = 150 \times 0,8480 / 0,9659$$

$$BC = 127,20 / 0,9659$$

$$BC \approx 131,7 \text{ m}$$

Verifica (legge dei coseni):

La distanza AC può anche essere calcolata dalla legge dei coseni:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\beta)$$

$$AC^2 = 150^2 + 131,7^2 - 2 \times 150 \times 131,7 \times \cos(47^\circ)$$

$$AC^2 = 22.500 + 17.345 - 39.510 \times 0,6820$$

$$AC^2 = 39.845 - 26.946 = 12.899$$

$$AC \approx 113,6 \text{ m}$$

Analisi degli errori:

Errore nella misurazione angolare: $\pm 0,5^\circ$ (realistico con quadrante medievale)

Propagazione dell'errore su AC:

Se $\alpha = 58^\circ \pm 0,5^\circ$ e $\beta = 47^\circ \pm 0,5^\circ$:

$$AC_{\min} = 150 \times \sin(46,5^\circ) / \sin(75,5^\circ) \approx 112,5 \text{ m}$$

$$AC_{\max} = 150 \times \sin(47,5^\circ) / \sin(74,5^\circ) \approx 114,7 \text{ m}$$

Errore relativo: $\pm 1,0\%$ (molto accettabile per scopi pratici)

VIII. Climi e Durata del Giorno

8.1 Formula della Durata del Giorno

La durata del giorno D (tempo tra alba e tramonto) dipende dalla latitudine φ e dalla declinazione solare δ :

$$D = (24 \text{ ore} / 180^\circ) \times \arccos(-\tan(\varphi) \times \tan(\delta))$$

O equivalentemente:

$$D = (2 / 15^\circ/\text{ora}) \times \arccos(-\tan(\varphi) \times \tan(\delta)) \text{ ore}$$

Casi speciali:

Equinozio ($\delta = 0^\circ$):

$$D = (2 / 15^\circ) \times \arccos(0) = (2 / 15^\circ) \times 90^\circ = 12 \text{ ore}$$

(Valido per tutte le latitudini)

Solstizio d'estate ($\delta = +23,44^\circ$):

Il giorno più lungo dell'anno nell'emisfero nord

Solstizio d'inverno ($\delta = -23,44^\circ$):

Il giorno più corto dell'anno nell'emisfero nord

8.2 Calcolo dei Climi dalla Durata del Giorno

I sette climi tradizionali erano definiti dalla durata del giorno più lungo (al solstizio d'estate):

Clima I: D = 13h 00m

Clima II: D = 13h 30m

Clima III: D = 14h 00m

Clima IV: D = 14h 30m

Clima V: D = 15h 00m

Clima VI: D = 15h 30m

Clima VII: D = 16h 00m

Calcolo della latitudine per ciascun clima:

Risolvendo l'equazione per φ con $\delta = +23,44^\circ$:

$$D = (2 / 15^\circ) \times \arccos(-\tan(\varphi) \times \tan(23,44^\circ))$$

Riarrangiando:

$$\arccos(-\tan(\varphi) \times \tan(23,44^\circ)) = D \times 15^\circ / 2$$

$$-\tan(\varphi) \times \tan(23,44^\circ) = \cos(D \times 15^\circ / 2)$$

$$\tan(\varphi) = -\cos(D \times 15^\circ / 2) / \tan(23,44^\circ)$$

$$\varphi = \arctan[-\cos(D \times 15^\circ / 2) / 0,4331]$$

Esempi di calcolo:

Clima III (D = 14h 00m = 14,0 ore):

$$D \times 15^\circ / 2 = 14,0 \times 7,5^\circ = 105^\circ$$

$$\cos(105^\circ) = -0,2588$$

$$\tan(\varphi) = -(-0,2588) / 0,4331 = 0,5976$$

$$\varphi = \arctan(0,5976) \approx 30,9^\circ \text{ N}$$

Città nel Clima III: Cairo (30,0° N), Baghdad (33,3° N)

Clima V (D = 15h 00m = 15,0 ore):

$$D \times 15^\circ / 2 = 15,0 \times 7,5^\circ = 112,5^\circ$$

$$\cos(112,5^\circ) = -0,3827$$

$$\tan(\varphi) = 0,3827 / 0,4331 = 0,8837$$

$$\varphi = \arctan(0,8837) \approx 41,5^\circ \text{ N}$$

Città nel Clima V: Istanbul (41,0° N), Roma (41,9° N)

Tabella completa:

Clima	Giorno più lungo	Latitudine	Regioni tipiche
I	13h 00m	16,5° N	Yemen meridionale, Sudan
II	13h 30m	23,5° N	Mecca, Alto Egitto
III	14h 00m	30,9° N	Cairo, Baghdad, Iran meridionale
IV	14h 30m	36,9° N	Damasco, Tunisi, Sicilia
V	15h 00m	41,5° N m	Istanbul, Roma, Asia centrale nord
VI	15h 30m	45,5° N	Crimea, Francia meridionale
VII	16h 00m	48,9° N	Vienna, Europa centrale

8.3 Variazione Annuale della Durata del Giorno

Per una latitudine fissa, la durata del giorno varia durante l'anno secondo la declinazione solare.

Esempio: Baghdad ($\varphi = 33,3^\circ \text{ N}$)

Al solstizio d'estate ($\delta = +23,44^\circ$):

$$D_{\text{max}} = (2 / 15^\circ) \times \arccos(-\tan(33,3^\circ) \times \tan(23,44^\circ))$$

$$D_{\text{max}} = (2 / 15^\circ) \times \arccos(-0,6568 \times 0,4331)$$

$$D_{\text{max}} = (2 / 15^\circ) \times \arccos(-0,2845)$$

$$D_{\text{max}} = (2 / 15^\circ) \times 106,5^\circ$$

$$D_{\text{max}} \approx 14,2 \text{ ore } (\approx 14\text{h } 12\text{m})$$

All'equinozio ($\delta = 0^\circ$):

$$D_{\text{eq}} = 12 \text{ ore}$$

Al solstizio d'inverno ($\delta = -23,44^\circ$):

$$D_{\text{min}} = 24 - D_{\text{max}} \approx 9,8 \text{ ore } (\approx 9\text{h } 48\text{m})$$

Differenza tra giorno più lungo e più corto:

$$\Delta D = 14,2 - 9,8 = 4,4 \text{ ore}$$

Questa variazione è minore rispetto alle alte latitudini, dove può raggiungere valori estremi.

IX. Algebra e Sistemi Numerici

9.1 Il Completamento del Quadrato

Il metodo di al-Khwarizmi per risolvere equazioni quadratiche si basa sul completamento del quadrato, visualizzato geometricamente.

Esempio: $x^2 + 10x = 39$

Interpretazione geometrica:

x^2 rappresenta un quadrato di lato x

$10x$ rappresenta un rettangolo di dimensioni $x \times 10$, che dividiamo in quattro rettangoli $x \times 2,5$

Attacciamo questi quattro rettangoli ai quattro lati del quadrato centrale

Rimangono quattro "buchi" agli angoli, ciascuno di area $2,5 \times 2,5 = 6,25$

Area totale dei buchi: $4 \times 6,25 = 25$

Procedimento algebrico:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = \pm 8$$

Soluzioni:

$$x_1 = 8 - 5 = 3$$

$$x_2 = -8 - 5 = -13 \text{ (rifiutata nel contesto medievale, dove solo soluzioni positive)}$$

avevano significato)

Formula generale per $ax^2 + bx = c$:

Dividendo per a:

$$x^2 + (b/a)x = c/a$$

Metà del coefficiente di x:

$$(b/a) / 2 = b/(2a)$$

Quadrato di questo termine:

$$[b/(2a)]^2 = b^2/(4a^2)$$

Aggiungendo ad entrambi i membri:

$$x^2 + (b/a)x + b^2/(4a^2) = c/a + b^2/(4a^2)$$

$$(x + b/(2a))^2 = c/a + b^2/(4a^2) = (4ac + b^2)/(4a^2)$$

$$x + b/(2a) = \pm \sqrt{(4ac + b^2)/(4a^2)}$$

$$x = -b/(2a) \pm \sqrt{(4ac + b^2)/(4a^2)}$$

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac})/(2a)$$

(Nota: questa è la formula per $ax^2 + bx = c$; per la forma moderna $ax^2 + bx + c = 0$, dove c è negativo, si ottiene la formula standard con $-4ac$ sotto la radice)

9.2 Algoritmo di Moltiplicazione a Reticolo (Gelosia)

Esempio: 347×28

Si costruisce una griglia 3×2 (numero di cifre):

$$\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad 7 \\ +----+----+----+ \\ 2 \mid 0/6 \mid 0/8 \mid 1/4 \mid = 600 + 80 + 140 = 820 \quad (\times 10 = 8200) \\ +----+----+----+ \\ 8 \mid 2/4 \mid 3/2 \mid 5/6 \mid = 2400 + 320 + 560 = 3280 \quad (\times 1 = 3280) \\ +----+----+----+ \end{array}$$

Ogni cella contiene il prodotto diviso in decine (sopra diagonale) e unità (sotto diagonale):

$$\begin{array}{l} 3 \times 2 = 06 \rightarrow |0/6| \\ 4 \times 2 = 08 \rightarrow |0/8| \\ 7 \times 2 = 14 \rightarrow |1/4| \\ 3 \times 8 = 24 \rightarrow |2/4| \\ 4 \times 8 = 32 \rightarrow |3/2| \\ 7 \times 8 = 56 \rightarrow |5/6| \end{array}$$

Somma in diagonale (da destra verso sinistra):

Diagonale 1 (unità): 6

Diagonale 2 (decine): $4 + 8 + 2 = 14 \rightarrow$ scrivo 4, riporto 1

Diagonale 3 (centinaia): $1 + 4 + 2 + 3 = 10 +$ riporto 1 = 11 $\rightarrow$ scrivo 1, riporto 1

Diagonale 4 (migliaia): $0 + 6 + 4 = 10 + \text{riporto } 1 = 11 \rightarrow \text{scrivo } 1, \text{riporto } 1$

Diagonale 5 (decine di migliaia): $0 + 0 + 2 = 2 + \text{riporto } 1 = 3$

Diagonale 6 (centinaia di migliaia): 0

Risultato: 9.716

Verifica:

$$347 \times 28 = 347 \times 20 + 347 \times 8$$

$$= 6.940 + 2.776 = 9.716$$

Vantaggi del metodo:

Riduce la moltiplicazione a moltiplicazioni di singole cifre

Organizza sistematicamente i prodotti parziali

Facilita la verifica (ogni cella può essere controllata indipendentemente)

Visivamente intuitivo

9.3 Metodo di Erone per Radici Quadrate

Per calcolare $\sqrt{N}$, si usa l'iterazione:

$$x_{(n+1)} = (x_n + N/x_n) / 2$$

partendo da una stima iniziale x_0 ragionevole.

Derivazione del metodo:

Se x è un'approssimazione di $\sqrt{N}$, allora:

Se $x < \sqrt{N}$, allora $N/x > \sqrt{N}$

Se $x > \sqrt{N}$, allora $N/x < \sqrt{N}$

La media $(x + N/x)/2$ è una migliore approssimazione.

Dimostrazione della convergenza:

L'errore $e_n = x_n - \sqrt{N}$ evolve secondo:

$$e_{(n+1)} = (e_n)^2 / (2x_n)$$

Poiché il termine quadratico divide per un fattore lineare, l'errore si dimezza a ogni iterazione (convergenza quadratica).

Esempio: Calcolo di $\sqrt{50}$

Stima iniziale: $x_0 = 7$ (poiché $7^2 = 49$ è vicino a 50)

Iterazione 1:

$$x_1 = (7 + 50/7) / 2 = (7 + 7,1429) / 2 = 7,0714$$

Iterazione 2:

$$x_2 = (7,0714 + 50/7,0714) / 2 = (7,0714 + 7,0711) / 2 = 7,0711$$

Iterazione 3:

$$x_3 = (7,0711 + 50/7,0711) / 2 = (7,0711 + 7,0711) / 2 = 7,0711$$

Valore corretto: $\sqrt{50} \approx 7,071067812...$

Dopo solo 2 iterazioni, abbiamo 4 cifre decimali corrette!

Esempio: Calcolo di $\sqrt{2}$

Stima iniziale: $x_0 = 1,5$

Iterazione 1:

$$x_1 = (1,5 + 2/1,5) / 2 = (1,5 + 1,3333) / 2 = 1,4167$$

Iterazione 2:

$$x_2 = (1,4167 + 2/1,4167) / 2 = (1,4167 + 1,4118) / 2 = 1,4142$$

Iterazione 3:

$$x_3 = (1,4142 + 2/1,4142) / 2 = (1,4142 + 1,4142) / 2 = 1,4142$$

Valore corretto: $\sqrt{2} \approx 1,41421356...$

Convergenza in 2-3 iterazioni a 4 cifre decimali.

X. Analisi degli Errori e Precisioni

10.1 Errori nella Misurazione Angolare

Strumenti medievali e loro precisioni:

Strumento	Risoluzione	Errore di lettura	Errore totale
Astrolabio grande ($\varnothing$ 30 cm)	5-10'	$\pm 5'$	$\pm 10-15'$
Astrolabio piccolo ($\varnothing$ 15 cm)	10-15'	$\pm 10'$	$\pm 15-20'$
Quadrante murale fisso	2-5'	$\pm 2'$	$\pm 5-10'$
Kamal nautico	$\sim 30-60'$	$\pm 30'$	$\pm 1-2^\circ$

Propagazione dell'errore in latitudine:

Errore angolare $\sigma_\theta \rightarrow$ errore in latitudine σ_φ

Per la determinazione solare: $\sigma_\varphi \approx \sigma_h$ (l'errore in altezza si trasmette direttamente)

Se $\sigma_h = 10' = 0,167^\circ$:

$$\sigma_\varphi \approx 0,167^\circ \times 111 \text{ km}/^\circ \approx 18,5 \text{ km}$$

Rifrazione atmosferica:

La rifrazione deflette i raggi luminosi vicino all'orizzonte. L'angolo di rifrazione R dipende dalla distanza zenitale z:

$$R \approx (P / 1010) \times (283 / T) \times \tan(z) \times (1 - 0,0065 \times \tan^2(z))$$

dove P è la pressione atmosferica in millibar e T la temperatura in Kelvin.

A livello del mare ($P = 1010 \text{ mbar}$, $T = 283 \text{ K}$):

$$R \approx \tan(z) \times (1 - 0,0065 \times \tan^2(z)) \text{ arcmin}$$

All'orizzonte ($z = 90^\circ$): $R \approx 34'$ (circa $0,57^\circ$)

A $z = 80^\circ$: $R \approx 5,6'$

A $z = 70^\circ$: $R \approx 2,8'$

A $z = 45^\circ$: $R \approx 1,0'$

Gli astronomi arabi erano consapevoli di questo effetto ma non disponevano di formule precise. Ibn Yunus compilò tavole empiriche di correzione basate su osservazioni sistematiche.

10.2 Errori nella Determinazione della Longitudine

Metodo delle eclissi:

Errore nella temporizzazione: $\sigma_t \approx 10\text{-}30$ minuti

Errore in longitudine: $\sigma_\lambda = \sigma_t \times 15^\circ/\text{ora} = \sigma_t \times 0,25^\circ/\text{min}$

Per $\sigma_t = 20$ minuti:

$\sigma_\lambda = 20 \times 0,25^\circ = 5,0^\circ$

A $\varphi = 35^\circ$ N:

$\sigma_d = 5,0^\circ \times \cos(35^\circ) \times 111 \text{ km}/^\circ \approx 455 \text{ km}$

Metodo delle distanze itinerarie:

Errore relativo nella distanza: $\varepsilon_d \approx 1\text{-}2\%$ (misurazioni con catene)

Errore angolare nella direzione: $\sigma_\alpha \approx 5\text{-}10^\circ$

Per un percorso di 1.000 km verso est da $\varphi = 35^\circ$ N:

Errore da misura della distanza:

$\sigma_{d1} = 0,02 \times 1.000 = 20 \text{ km}$

Errore da direzione (supponendo $\alpha = 90^\circ \pm 5^\circ$):

Componente lungo il parallelo: $d \times \cos(\alpha)$

Variazione: $1.000 \times [\cos(90^\circ) - \cos(85^\circ)] = 1.000 \times [0 - 0,0872] \approx 87 \text{ km}$

Errore totale (somma quadratica):

$\sigma_{d_totale} = \sqrt{20^2 + 87^2} \approx 90 \text{ km}$

In termini di longitudine:

$\sigma_\lambda = 90 / (\cos(35^\circ) \times 111) \approx 90 / 91 \approx 1,0^\circ$

10.3 Stima della Precisione Complessiva

Sintesi degli errori per diverse quantità:

Quantità	Metodo	Precis. tipica	Distanza (km)
Latitudine (astronomica)	Altezza meridiana Sole	$\pm 0,1\text{-}0,2^\circ$	$\pm 11\text{-}22 \text{ km}$
Latitudine (nautica)	Kamal	$\pm 1\text{-}2^\circ$	$\pm 111\text{-}222 \text{ km}$
Longitudine (eclissi)	Eclissi lunari	$\pm 3\text{-}5^\circ$	$\pm 250\text{-}400 \text{ km}$ (a 35° N)
Longitudine (itineraria)	Distanze terrestri	$\pm 1\text{-}3^\circ$	$\pm 80\text{-}250 \text{ km}$ (a 35° N)
Raggio terrestre	Metodo al-Biruni	$\pm 5\text{-}10\%$	—
Distanza tra città	Triangolazione	$\pm 1\text{-}2\%$	—

Accuratezza relativa delle mappe:

Per le regioni centrali del mondo islamico (Mediterraneo, Medio Oriente, Persia):

Errore medio in latitudine: $\pm 15\text{-}30\text{ km}$ ($\pm 0,15\text{-}0,30^\circ$)

Errore medio in longitudine: $\pm 100\text{-}300\text{ km}$ ($\pm 1\text{-}3^\circ$ a latitudini medie)

Per regioni periferiche (Asia orientale, Africa subsahariana, Europa settentrionale):

Errore in latitudine: $\pm 50\text{-}100\text{ km}$ ($\pm 0,5\text{-}1,0^\circ$)

Errore in longitudine: $\pm 500\text{-}1.000\text{ km}$ ($\pm 5\text{-}10^\circ$)

Questi errori sono coerenti con le analisi moderne delle mappe medievali superstiti.